

SEIR モデルを用いた COVID-19 流行の考察

ゆり* (@81suke_)

2020/4/23

1 目的

2020 年 1 月より世界中で猛威を振るっている新型コロナウイルス (以下 COVID-19 とする) は 4 月現在も衰えることを知らず流行している。首都圏では緊急事態宣言が発令され、日本経済への影響を甚大なものである。また、感染は広まるばかりであり、流行のピークおよび終息期については憶測はされるもののはっきりとは見えないのが現状である。

本論は、全体像が判明していない COVID-19 について、感染症流行の数理モデルである SEIR モデルを用いて、日本国における流行推移を読み取ることを目的とする。

なお、本文の考察はあくまで感染症の素人によるものであることに留意する必要がある。本論を読んだことで被るいかなる損害に対しても責任は負いかねる。

2 検討モデル

ここでは、今回の流行予測に用いるモデルについて説明する。

2.1 SIR モデル

まず、SEIR モデルに触れる前に、より簡易的なモデルである SIR モデルについて述べる。

感染症の数理モデルは、個体群ごとの動態を想定して個体群レベルの流行メカニズムを考慮

したボトムアップ式の過程で構築される。その中でも最も簡単なモデルが SIR モデルである。

SIR のそれぞれは、

- Susceptible(感受性保持者)
- Infected(感染者)
- Recovered(免疫保持者)

から構成される。

SIR モデルにおいて、全人口は感受性保持者 S ・感染者 I ・免疫保持者 R の 3 つへ分割され、感受性保持者 S は感受性保持者 S と感染者 I の積に比例して定率で感染者 I に移行し、感染者 I は定率で免疫保持者 R に移行する (感染期間は指数分布に従う) と仮定される。

この時間発展を常微分方程式で記述される連続力学系として表せば、

$$\frac{dS}{dt}(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$\frac{dI}{dt}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

$$\frac{dR}{dt}(t) = \gamma I(t)$$

($\beta > 0$): 感染率)

($\gamma > 0$): 回復率)

となる。¹

上記の 3 式の和を取れば、

$$\frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = 0$$

¹このとき、平均感染期間は γ^{-1} で表される。

であり、これは総人口が一定値をとる保存則（閉鎖人口の仮定）

$$S(t) + I(t) + R(t) = \text{const.}$$

に対応している。

簡単のため、初期値を

$$I_0 = I(0) > 0$$

$$S_0 = S(0) > 0$$

とおくと、

$$\frac{dI}{dt}(0) = I_0(\beta S_0 - \gamma) > 0$$

のとき、すなわち

$$R_0 = \beta S_0 / \gamma > 1$$

のとき流行が発生する。この無次元量 R_0 は基本再生産数と呼ばれる。

SIR モデルを感染モデルのサンプルに用いることを考える。人口 1000 人の村に 1 人の感染者が発生したとして、感染経過をシミュレーションした。なお平均感染期間が 14 日として $\gamma = 1/14$ とし、 R_0 はドイツの COVID-19 事例で報告されている 2.5 を採用した。

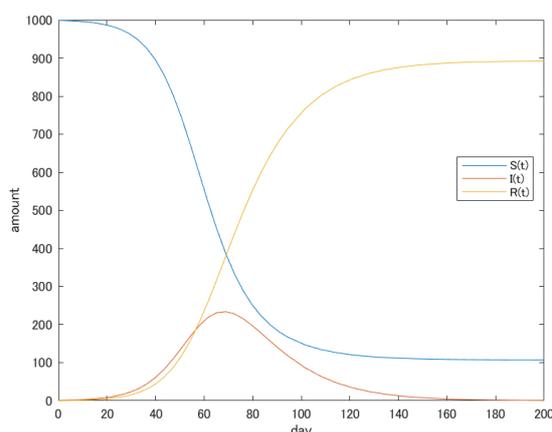


図 1: SIR sample model

上のような最も単純なモデルでは

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$$

が成り立ち、エンデミックな定常状態や周期的な流行といった現象は説明できない。また、COVID-19 にも見られるような潜伏期間も設けられていないため、今回の事例に適用するのは不適切である。そのため、今回は以後に述べる SEIR モデルを用いて検証を行うことにする。

2.2 SEIR モデル

SEIR モデルは SIR モデルをさらに発展させた数理モデルで、 S, I, R に加え、新たに潜伏期間の感染者集団 E を定義する。すなわち、

- **S**usceptible(感受性保持者)
- **E**xposed(潜伏期感染者)
- **I**nfectious(発症者)
- **R**ecovered(免疫保持者)

の 4 つに母集団を区分する。

SIR モデルと同様に 4 つの部分人口において時間発展を常微分方程式で記述すると、

$$\frac{dS}{dt}(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$\frac{dE}{dt}(t) = \beta S(t)I(t) - \varepsilon E(t)$$

$$\frac{dI}{dt}(t) = \varepsilon E(t) - \gamma I(t)$$

$$\frac{dR}{dt}(t) = \gamma I(t)$$

($\varepsilon (> 0)$): 暴露後に感染性を得る率)

となる。²

さらに、同様にして

$$\frac{d}{dt}(S(t) + E(t) + I(t) + R(t)) = 0$$

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = \text{const.}$$

²このとき、平均感染待ち期間は ε^{-1} で表される。

が得られる。

SIR モデル時に用いたサンプルを、SEIR モデルにも適応させる。人口 1000 人の村に 1 人の潜伏期感染者が発生したとして、 $\gamma = 1/14, \varepsilon = 1/7, \mathcal{R}_0 = 2.5$ のもとで感染経過をシミュレーションした結果が図 2 である。

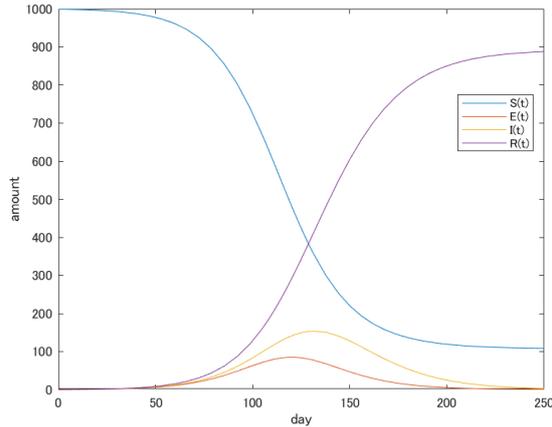


図 2: SEIR sample model

SIR モデルと比較すると、感染者数の山は低いものの、流行の終息には時間がかかるモデルとなった。ただ、感染症は当然ながら死亡に至るケースもある。この場合には閉鎖人口の仮定は成り立たない。この点を修正したモデルを考えることにする。

2.3 修正 SEIR モデル

SEIR モデルの部分人口に加え、さらに死亡者 D を仮定する。つまり、

- Susceptible(感受性保持者)
- Exposed(潜伏期感染者)
- Infectious(発症者)
- Recovered(免疫保持者)

- Dead(死亡者)

の 5 つに母集団を区分する。

このとき、条件式は以下の通り訂正される。

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt}(t) &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dE}{dt}(t) &= \beta S(t)I(t) - \varepsilon E(t) \\ \frac{dI}{dt}(t) &= \varepsilon E(t) - (\gamma + \delta\gamma)I(t) \\ \frac{dR}{dt}(t) &= \gamma I(t) \\ \frac{dD}{dt}(t) &= \delta\gamma I(t) \end{aligned}$$

($\delta > 0$) : 致死率

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + D(t)) &= 0 \\ S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + D(t) &= const. \end{aligned}$$

$\delta = 0.02 (=2\%)$ として前節と同様にシミュレーションを行うと図 3 が得られる。

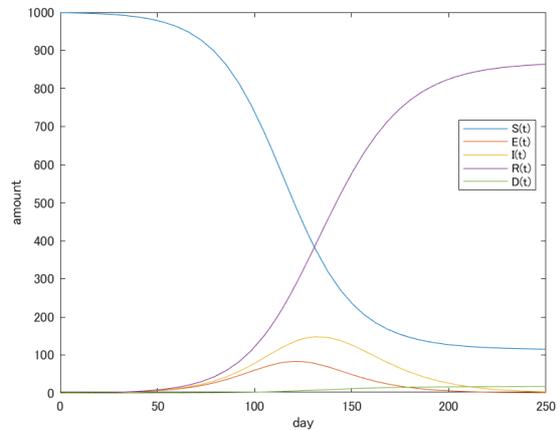


図 3: Modified SEIR sample model

以後は、このモデルを用いて議論する。

3 感染シミュレーション

ここからは、実際の COVID-19 感染事例を精査して SEIR モデルを適用する。

3.1 諸数の決定

このモデルにおいては、基本再生産数 \mathcal{R}_0 の決定が重要である。COVID-19 の事例、社会情勢を考慮し諸数を決定した。

感染モデルの母集団の総人口 $U (= S + E + I + R + D)$ は日本国の総人口と一致させた。 $(U=120,000,000)$ 。5 個の集団の部分人口のうち、発症者、免疫保持者、死亡者の初期値 $I(0), R(0), D(0)$ は 2020/4/22 時点での日本での統計データ³を採用した。潜伏期感染者の初期値 $E(0)$ については、現在報告されている統計値に PCR 検査陰性人数の 4 割を加えた⁴数の 8.33 倍⁵の $E(0) = 12708$ とした。 $S(0)$ は総人口 U から他 4 個の集団の人数を差し引くことで得られた。

COVID-19 における ε, γ については、現在報告されている症例から、 $\varepsilon = 1/7, \gamma = 1/10$ とした。致死率 δ については、報告⁶されている推定値 0.66% ($\gamma = 6.6 \times 10^{-3}$) を採用した。

\mathcal{R}_0 であるが、現在推測されている値 $\mathcal{R}_0 = 2.5$ を用いる。ただし、社会活動自粛が行われている状況を加味した指標を設定する。

自粛がどの程度行われているかを示す指標として、自粛度数 σ を設定する。自粛度数を加味し

た基本再生産数 \mathcal{R}'_0 は下式により表される。

$$\mathcal{R}'_0 = (1 - \sigma)\mathcal{R}_0$$

日本政府により最低 7 割の接触を控えることが要請されており、母集団全てがこれに従うものとして $\sigma = 0.7$ とする。

これらのモデルをもとに SEIR モデルにより感染予測を行った結果、図 4 を得た。

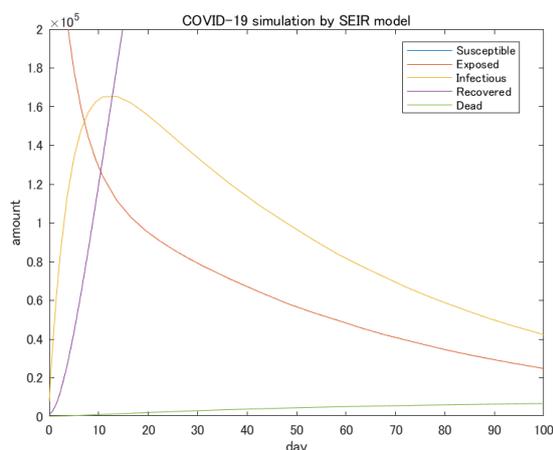


図 4: Modified SEIR sample model ($\sigma = 0.7$)

なお、母集団が自粛に協力的でなかった場合も考えた。3 割程度しか自粛がされなかった場合、 $\sigma = 0.3$ として同様に予測を行うと図 5 を得た。

³ $I(0) = 7866, R(0) = 1339, D(0) = 244$ 。[3] 参照。

⁴PCR 検査の精度は 6 割ほどの報告があるため、PCR 検査で陰性であった人数の 4 割は潜在的に陽性であるとの仮定をした。また、陽性と検出されたが陰性であるケースはないとした。

⁵Columbia University medical center での調査では、感染者の 88%が無症状であるとの報告がある。この報告を信用すれば、日本では現在 PCR 検査を有症状者にのみ行っているため感染判明者は僅か全体の 12%であるということになる。

⁶[4] 参照。

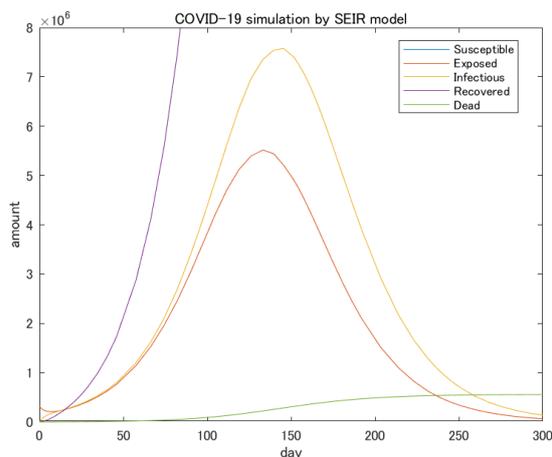


図 5: Modyfied SEIR sample model($\sigma = 0.3$)

4 考察

前節の結果から、7割程度の自粛を全体が遵守すれば、今後10日前後(2020年5月上旬まで)は発症者数が増加するが、以後は減少に転じるとの結果が得られた。ただし、自粛が一部しかされなかった場合、150日後(2020年9月下旬まで)発症者が増え続けるとの予測が得られた。COVID-19を終息まで持ち込むには、国民全員の自粛への継続的な協力が必須であることも読み取れた。

また、現段階は潜伏期感染者が非常に多いことが推測されるため、これらの集団の動向により結果は大きく左右されそうである。

仮に、自粛が徹底的に行われたとしても、発症者が160,000人を越えるとの試算も出た。発症者全員を病院に収容するというのはこの数字からも現実でないことがわかる。また、死亡者が5,000人ほどに達するとの見込みも相当厳しいものがある。患者への処置、対応が現在の課題であるだろう。

参考文献

- [1] 西浦博, 稲葉寿 感染症流行の予測: 感染症数理モデルにおける定量的課題 統計数理研究所 2006
- [2] 大橋順 新型コロナウイルス感染症の流行予測 東京大学大学院理学系研究科ヒトゲノム多様性研究室
- [3] 萩原和樹 新型コロナウイルス国内感染の状況 東洋経済オンライン
<https://toyokeizai.net/sp/visual/tko/covid19/>
- [4] Mahase E Covid-19: death rate is 0.66% and increases with age, study estimates The BMJ
<https://www.bmj.com/content/369/bmj.m1327.long>