

水理学 開水路の流れ 講義ノート

ゆり* (@81suke_)

目次

1	開水路の等流	2
1.1	(断面) 平均流速公式	2
1.1.1	平均流速の実用公式	2
2	開水路急変部の流れ	3
2.1	開水路遷移部における水面形	3
2.1.1	比エネルギーと限界水深	3
2.1.2	常流と射流	4
2.1.3	水路床高および水路幅の変化と水面形	6
2.2	開水路急変部における水面形	7
2.2.1	開水路の運動量則-比力	7
2.2.2	跳水現象	8
3	開水路の漸変流	10
3.1	開水路漸変 (定常) 流の基礎方程式	10
	参考文献	11

1 開水路の等流

1.1 (断面) 平均流速公式

1.1.1 平均流速の実用公式

- 等流の定義と特徴

水路断面が流れ方向に同じ (一様な) 一定勾配の直線水路で、かつ流れの状態も流れ方向によらず一様である定常流

エネルギー勾配

$$I = i_0 - \frac{d}{dx} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) \simeq i_0 \quad (1)$$

i_0 ... 水路勾配

- 重要な定数

$$R = \frac{A}{S} \quad (2)$$

R ... 径深 (等流では $R \simeq h$)

A ... 断面積

S ... 潤辺 (断面内の流水と接する辺の長さ)

1. Chezy の平均流速公式

$$v = C\sqrt{RI} \quad (3)$$

v ... 流速 [m/s](パラメータ)

C ... Chezy の定数、係数

2. Manning の平均流速公式

$$v = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

n ... マニングの粗度係数 (次元をもつが、実用上は次元ないようなもの)

等流での水深 (等流水深) はマニングの式より

$$h = \left(\frac{q^2 n^2}{i_0} \right)^{\frac{3}{10}} \quad (5)$$

で表される。

摩擦損失係数 f' を使って表すと、

$$I = f' \frac{1}{R} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{ダルシー・ワイズバッハの式の流用}) \quad (6)$$

R ... 円管のときは違う

エネルギー勾配=区間あたりの摩擦によるエネルギー損失

変形すると、

$$v = \sqrt{\frac{2g}{f'}} \sqrt{RI} \quad (7)$$

2 開水路急変部の流れ

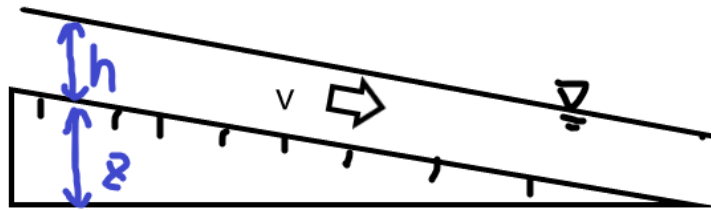
2.1 開水路遷移部における水面形

2.1.1 比エネルギーと限界水深

1. 定義

- 全水頭 H
エネルギー保存則、ベルヌーイより

$$H = \alpha \frac{v^2}{2g} + h + z \simeq \frac{v^2}{2g} + h + z \quad (8)$$



α ... 断面内の流速分布の非一様性に対する運動エネルギー修正係数, 通常は $\alpha = 1$

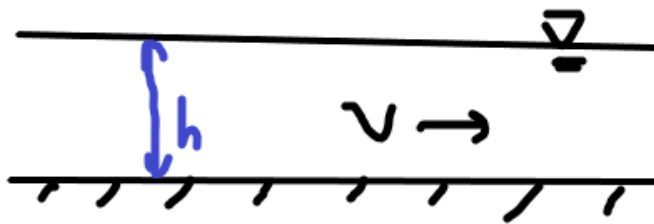
v ... ベルヌーイの式 (エネルギー) の開水路 ver.

v ... h に対して $\cos \theta$ や $\sin \theta$ を無視している

v ... 流体力学のエネルギーは、単位時間あたり、単位体積重量 (ρg) あたりのものなので、その上で水頭に直すので、 ρg で割る

- 比エネルギー E

$$E = \frac{v^2}{2g} + h \quad (9)$$



- フルード数

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}} \quad (10)$$

2. 比エネルギー図

比エネルギーの式 (9) 中の v は

$$v = \frac{q}{h} \quad (11)$$

で表される。

このとき、

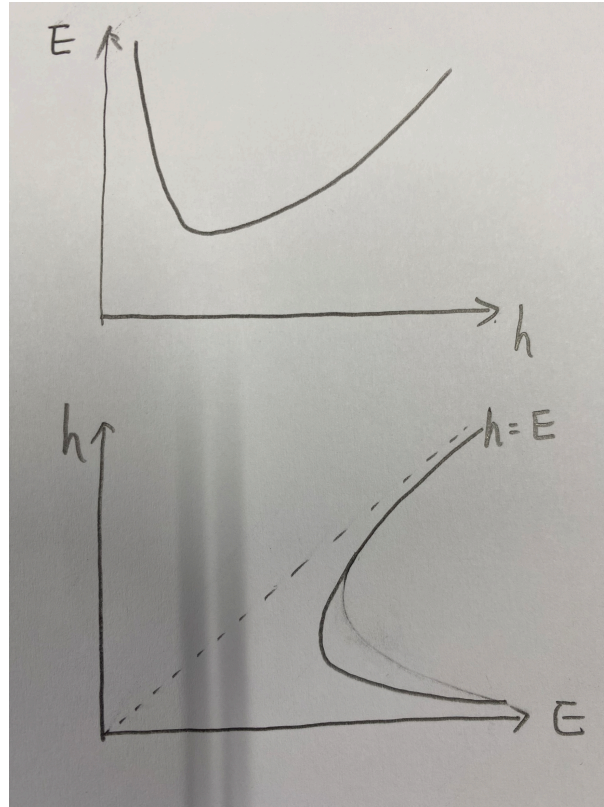
$$E = \frac{q^2}{2gh^2} + h \quad (12)$$

となる。

ここで単位幅流量 q は常に一定として h の関数とみる。

$$\frac{\partial E}{\partial h} = -\frac{q^2}{gh^3} + 1 \quad (13)$$

これより、以下の比エネルギー図が描ける。

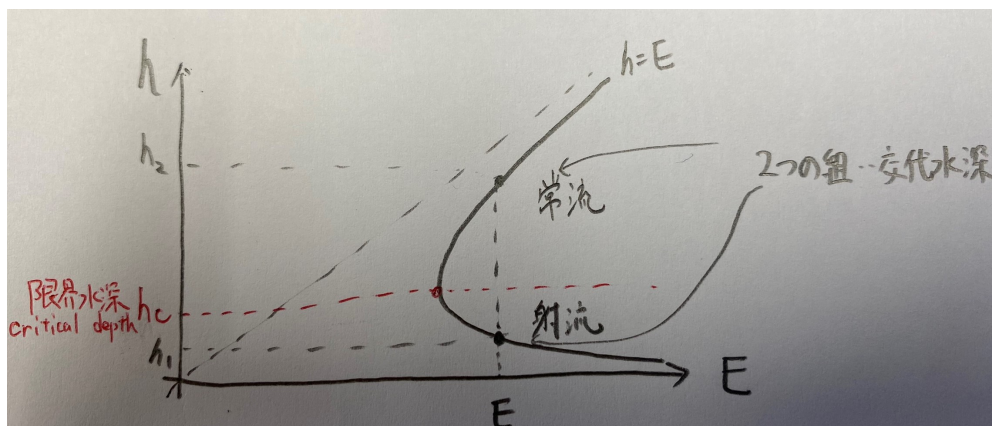


2.1.2 常流と射流

1. 限界水深とフルード数 (と交代水深)

- 常流... 深くて遅い流れ... $F_r < 1$
- 射流... 浅くて速い流れ... $F_r > 1$

限界水深 ($h = h_c$) のとき $F_r = 1$ である。



h_c を求める。

式 (13) において、 h_c のとき極値より

$$\frac{\partial E}{\partial h} = -\frac{q^2}{gh^3} + 1 = 0 \quad (14)$$

計算して

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (15)$$

が得られる。

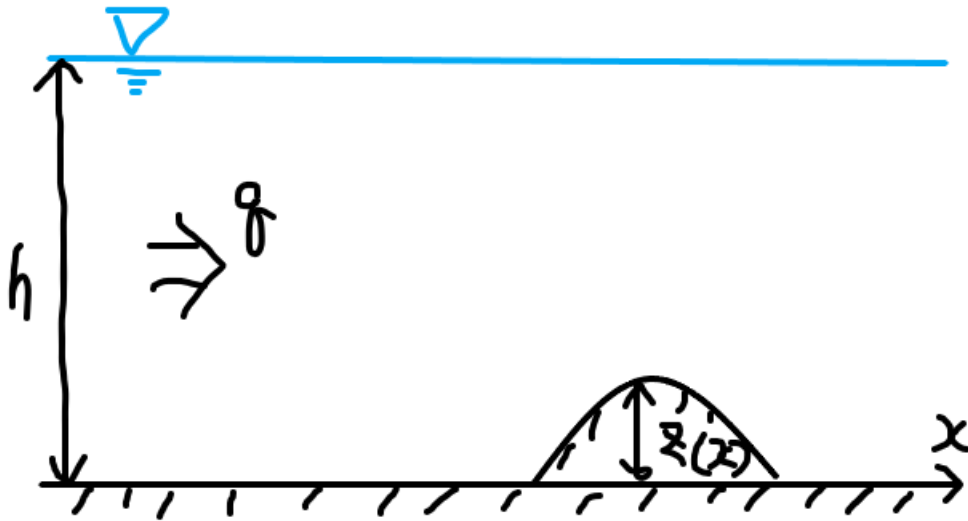
さらに比エネルギーの式 (9) に代入すると、

$$h_c = \frac{2}{3} E \quad (16)$$

となる。

また、限界水深である ($F_r = 1$) であるとき、速度水頭は水頭の $\frac{1}{2}$ 倍となる。

2.1.3 水路床高および水路幅の変化と水面形



上図状況を考える。式 (8) でベルヌーイの定理より

$$H = \frac{v^2}{2g} + h + z \quad (17)$$

について

$$\frac{dH}{dx} = 0 \quad (18)$$

ここで流量一定より

$$q = vh = \text{const.} \quad (19)$$

これらより

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{F_r^2 - 1} \frac{dz}{dx} \quad (20)$$

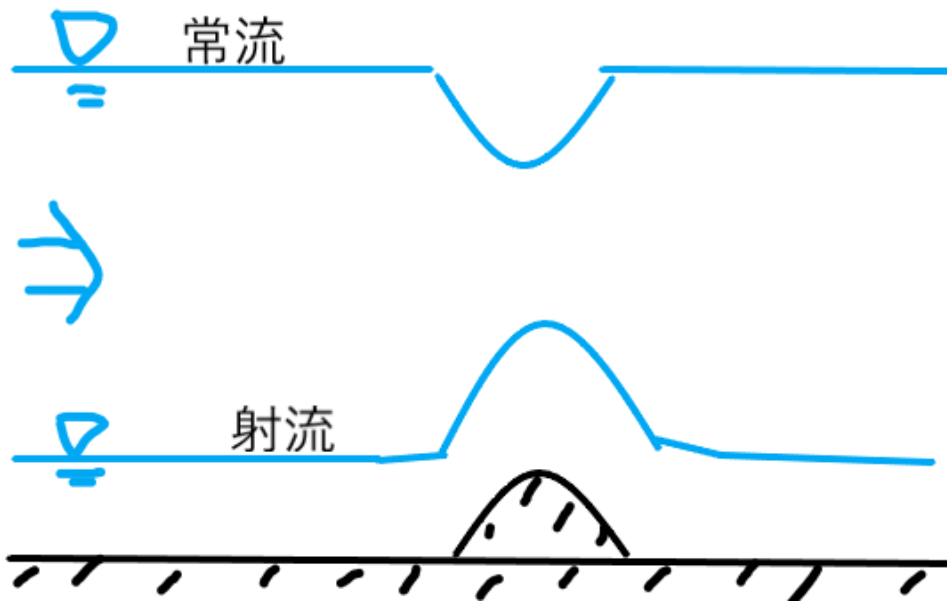
が導ける。

$h_0 = h + z$ とすると

$$\frac{dh_0}{dx} = \frac{d(h+z)}{dx} = \frac{F_r^2}{F_r^2 - 1} \frac{dz}{dx} \quad (21)$$

	$\frac{dz}{dx} > 0$	$\frac{dz}{dx} < 0$
常流 ($F_r < 1$)	$\frac{dh}{dx} < 0$, v :増加	$\frac{dh}{dx} > 0$, v :減少
射流 ($F_r > 1$)	$\frac{dh}{dx} > 0$, v :減少	$\frac{dh}{dx} < 0$, v :増加

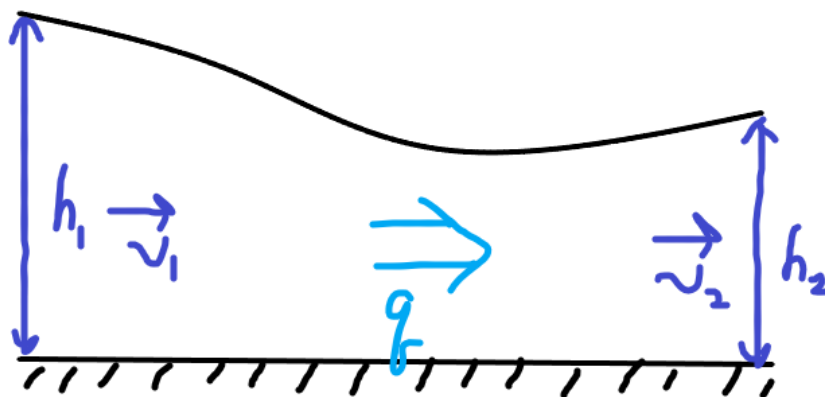
図にすると下図の通りとなる。



支配断面... なめらかに接続し上下流を一意に決定する役割をもつ断面

2.2 開水路急変部における水面形

2.2.1 開水路の運動量則-比力



圧力 P_1 は

$$P_1 = \int_0^{h_1} \rho g z dz = \frac{\rho g h_1^2}{2} \quad (22)$$

流れ方向の運動量束

$$[M_x]_1 = \rho q v_1 = \frac{\rho q^2}{h_1} \quad (23)$$

ここで、

$$P_1 + [M_x]_1 = P_2 + [M_x]_2 \quad (24)$$

より

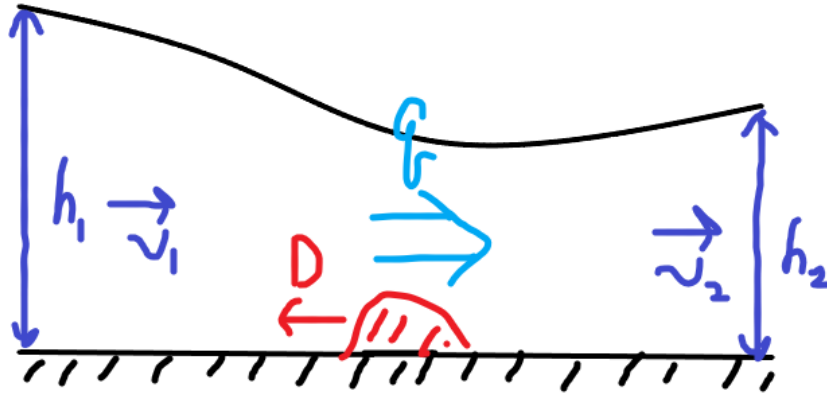
$$\frac{\rho g h_1^2}{2} + \frac{\rho q^2}{h_1} = \frac{\rho g h_2^2}{2} + \frac{\rho q^2}{h_2} \quad (25)$$

だから

$$\frac{h_1^2}{2} + \frac{q^2}{gh_1} = \frac{h_2^2}{2} + \frac{q^2}{gh_2} \quad (26)$$

となる。

次に抗力 D が発生する場合 (エネルギー損失が発生する場合) を考える。



式 (24) について

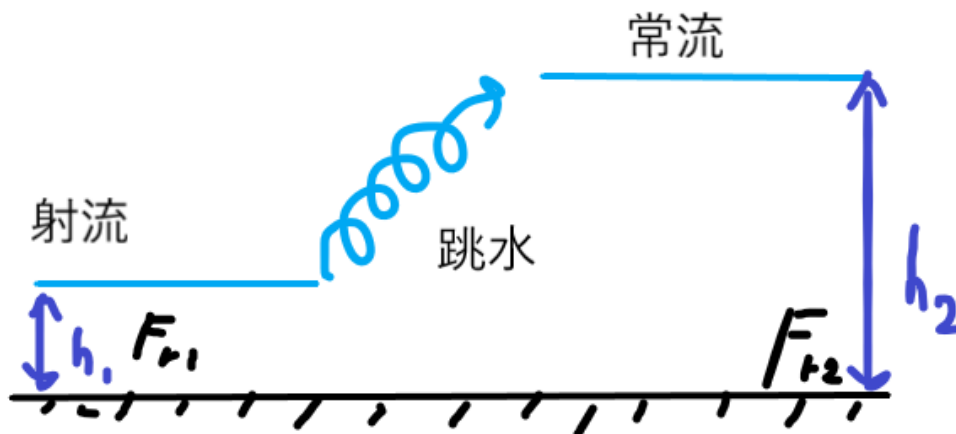
$$\frac{\rho gh_1^2}{2} + \frac{\rho q^2}{h_1} - D = \frac{\rho gh_2^2}{2} + \frac{\rho q^2}{h_2} \quad (27)$$

となり

$$\frac{h_1^2}{2} + \frac{q^2}{gh_1} - \frac{D}{\rho g} = \frac{h_2^2}{2} + \frac{q^2}{gh_2} \quad (28)$$

と書き換えられる。

2.2.2 跳水現象



共役水深を考える。

$$\frac{h_1^2}{2} + \frac{q^2}{gh_1} = \frac{h_2^2}{2} + \frac{q^2}{gh_2} \quad (29)$$

整理すると

$$(h_1 - h_2)(h_1 + h_2) + \frac{2q^2}{g} \left(\frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} \right) = 0 \quad (30)$$

となり

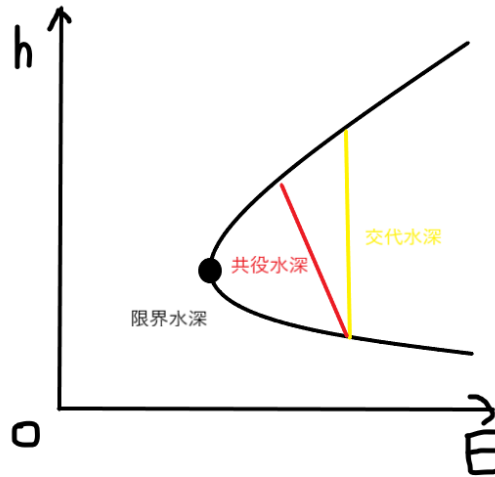
$$h_2^2 + h_1 h_2 - \frac{2q^2}{gh_1} = 0 \quad (31)$$

とできる.

h_2 の 2 次方程式としてこれを解くと

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8F_{r1}^2} - 1) \quad (32)$$

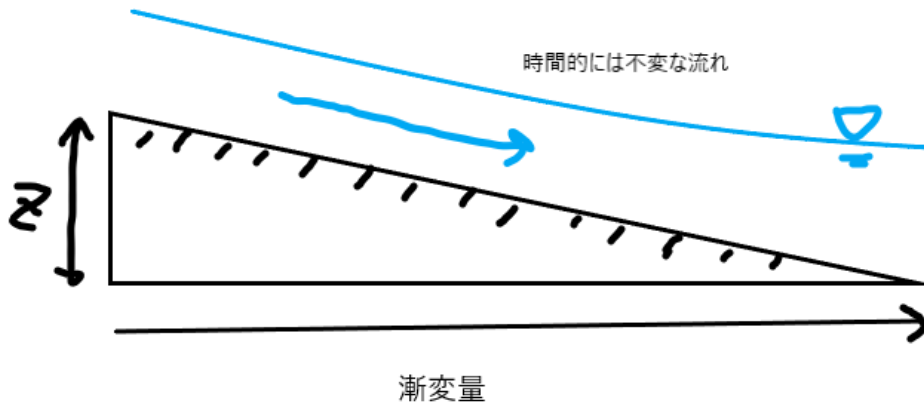
ここでの (h_1, h_2) の組を共役水深とよぶ。



3 開水路の漸変流

3.1 開水路漸変 (定常) 流の基礎方程式

以下のような状況で摩擦がある場合を考えると



全水頭 H について

$$H = h + z + \frac{v^2}{2g} \quad (33)$$

摩擦によるエネルギー損失は

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{dh_l}{dx} \quad (34)$$

と表される。

これらよりベルヌーイの定理を拡張でき

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{q}{h} \right)^2 + \frac{dh_l}{dx} = 0 \quad (35)$$

あるいは

$$\left(-i_0 + \frac{dh}{dx} \right) + \left(\frac{1}{2g} \frac{d}{dx} v^2 \right) + \left(f' \frac{1}{h} \frac{1}{2g} \left(\frac{q}{h} \right)^2 \right) \simeq I_s + I_v + I_f = 0 \quad (36)$$

ここで、

I_s ... 水面勾配

I_v ... 速度水頭勾配

I_f ... 摩擦損失勾配

整理すると

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i_0 - I_f}{1 - F_r^2} \quad (37)$$

ここで式 (20) と比較する。

式 (20) は

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{F_r^2 - 1} \frac{dz}{dx} = \frac{i_0}{1 - F_r^2} \quad (38)$$

となり、近い式であることが確認できる。

また、跳水によるエネルギー損失は

$$\Delta E = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} \quad (39)$$

と計算できる。

参考文献

- [1] 2019 4Q 水理学第二 講義
- [2] 日野幹雄 明解水理学