1.常微分方程式

2021年5月10日 月曜日　　15:00

(1) $\dfrac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$

$= (x+1)(y+1)$

$\dfrac{dy}{y+1} = (x+1)dx$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y+1} = \int (x+1)dx$

$\log|y+1| = \dfrac{1}{2}x^2 + x + C$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

基本解は $e^{(2+i)x}$、$e^{(2-i)x}$ より

一般解は

$y = e^{2x}(C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix})$

$= e^{2x}(C_1' \cos x + C_2' \sin x)$

(3) $9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} - 8y = e^{2x}$

$9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} - 8y = 0$ について

一般解は

$y_h = C_1 e^{\frac{2}{3}x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$

求める解はこれに特解 y_p を加えた形

$r(x) = e^{2x}$ より

$y_p = k e^{2x}$ とおける

[illegible]

$y_p = ke^{2x}$ とおける

y_pを与式に代入して

$$36ke^{2x} + 12ke^{2x} - 8ke^{2x} = e^{2x}$$

$$40ke^{2x} = e^{2x}$$

したがって

$$k = \frac{1}{40}$$

ゆえに $y = c_1 e^{\frac{2}{3}x} + c_2 e^{-\frac{4}{3}x} + \frac{1}{40} e^{2x}$

2.行列

2021年5月10日 月曜日　　15:21

Aの固有ベクトルを求める。

$$A=\begin{bmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\5&-3&-6\end{bmatrix}$$ について

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}6-\lambda&-3&-7\\-1&2-\lambda&1\\5&-3&-6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2+36\lambda-72-15-21$$

$$+70-35\lambda+18-3\lambda+18+3\lambda$$

$$=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2)$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

$$=0$$

$$\lambda=-1,1,2$$

(i) $\lambda=-1$ のとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}7&-3&-7\\-1&3&1\\5&-3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}s$

(ii) $\lambda=1$ のとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}5&-3&-7\\-1&1&1\\5&-3&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}t$

(iii) $\lambda=2$ のとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}4&-3&-7\\-1&0&1\\5&-3&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}u$

ゆえに

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

3.確率

2021年5月10日 月曜日　　16:17

(1)
$$E = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\times k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\times k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right)$$
$$= \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$
$$= \lambda\sum_{l=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}\right) \quad (\because l = k-1)$$
$$= \lambda$$

(2) $k=0$ のとき
$$P(k=0) = e^{-\lambda t}$$

(3) t時間内に1人以上来客する。
$$P(k \geqq 1) = 1 - P(k=0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

(4)
$$P(k=1) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

4.偏微分方程式

2021年5月10日 月曜日 16:51

(1) $\nabla^2 T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$

$T(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ と表せるとすると

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0$$

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$$

これは変数分離形であるから

(左辺) = (右辺) = μ とおける

(左辺) = μ より

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \mu R(r) = 0 \quad \cdots ①$$

(右辺) = μ より

$$\Theta''(\theta) + \mu\Theta(\theta) = 0 \quad \cdots ②$$

(2) ①の基本解を $R(r) = r^\alpha$ とおく

$R'(r) = \alpha r^{\alpha-1}$

$R''(r) = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$

これを①に代入すると

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - \mu r^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2-\mu)r^\alpha = 0$$

ここで $\mu > 0$ とする

$\mu = \lambda^2$ とおくと①について

$$\alpha^2-\mu = \alpha^2-\lambda^2 = 0$$

$$\alpha = \pm\lambda$$

よって $R(r) = r^\alpha = r^{\pm\lambda}$

基本解の線形結合により

$$R(r) = C_1 r^\lambda + C_2 r^{-\lambda}$$

ここで $r \to 0$ で $R(r)$ は有界より $C_2 = 0$ (こうしないと中心温度が∞となってしまう)

$$R(r) = C_1 r^\lambda$$

②について

基本解は $e^{\pm\lambda i\theta}$

したがって一般解は

$$\Theta(\theta) = C_1' e^{\lambda i\theta} + C_2' e^{-\lambda i\theta}$$

したがって一般解は

$$\Theta(\theta) = C_3' e^{\lambda i\theta} + C_4' e^{-\lambda i\theta}$$
$$= C_3 \cos\lambda\theta + C_4 \sin\lambda\theta$$

したがって求める一般解は

$$T(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$$
$$= C_1 r^{\lambda}(C_3 \cos\lambda\theta + C_4 \sin\lambda\theta)$$
$$= r^{\lambda}(C_1' \cos\lambda\theta + C_2' \sin\lambda\theta)$$

(3) 解の重ね合わせにより

$$T(r,\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta)\, r^m$$

$f_1(\theta) = T(10,\theta) = 15\cos\theta$ より

$$T(10,\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta)\, 10^m$$

A_m について