1.常微分方程式

2021年5月9日 日曜日 15:07

(1) $(2x+y)\,dx + x\,dy = 0$

xで除する

$$\left(2+\frac{y}{x}\right)dx + dy = 0$$

$y = ux$ とおくと $\quad \dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$

$$(2+u) + \left(x\frac{du}{dx} + u\right) = 0$$

$$x\frac{du}{dx} = -2u-2$$

$$-\frac{du}{2(u+1)} = \frac{1}{x}dx$$

$$\int -\frac{du}{2(u+1)} = \int \frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\log|2(u+1)| = \log|x| + C$$

$$\log\left|x\sqrt{2(u+1)}\right| = C$$

$$x\sqrt{2(u+1)} = C'$$

$$2x(x+y) = C''$$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$

基本解は $\quad e^{-2x}$、e^{3x} より

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos(2x)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ の一般解は

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ の一般解は

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$$

ここで特解 y_p を求める。

$r(x) = \cos 2x$ より

$y_p = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ の形

$y_p' = 2\beta \cos 2x - 2\alpha \sin 2x$

$y_p'' = -4\alpha \cos 2x - 4\beta \sin 2x$

これを与式に代入して

$$(-4\alpha + 6\beta + 2\alpha)\cos 2x + (-4\beta - 6\alpha + 2\beta)\sin 2x = \cos 2x$$

$$\begin{cases} -2\alpha + 6\beta = 1 \\ -6\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{1}{20} \quad \beta = \frac{3}{20}$$

ゆえに

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{20}\cos 2x + \frac{3}{20}\sin 2x$$

2.行列

2021年5月9日 日曜日 15:31

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{bmatrix}$$

固有値をもとめる.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-1\\1&2-\lambda&1\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$\lambda=1,2,3$ と求まった。

$\lambda=1$ のとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(A-\lambda E)X=0$ をみたす X は $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}t$

$\lambda=2$ のとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}t.$

$\lambda=3$のとき

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t$

以上より $P=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(このとき

$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる)

3.偏微分方程式

2021年5月9日 日曜日　16:03

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2u}{r^2}=\frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(1) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=\underline{-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial r^3}(r\phi)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\phi+r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$
$$=\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial r}+r\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$$
$$=\underline{2\frac{\partial\phi}{\partial r}+r\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}}$$

(2) (3.2)を(3.1)に代入すると

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial r^3}+\underline{\frac{2}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}}=\frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial r^3}+\underline{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)}=\frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=\frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^3\phi}{\partial r\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)=\frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

$$\underline{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)=\frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi)}$$

(3) $r\phi=R(r)\,T(t)$ で表せるとする。

このとき.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(R(r)T(t)) = \frac{1}{C_L^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R(r)T(t))$$

$$R''(r)T(t) = \frac{1}{C_L^2}R(r)T''(t)$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} = \frac{1}{C_L^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

これは変数分離形より、(左辺) = (右辺) = μ とおける.

(左辺) = μ より.

$$R''(r) = \mu R(r)$$

(右辺) = μ より

$$T''(t) = \mu C_L^2 T(t)$$

(i) $\mu > 0$ のとき

$\mu = \lambda^2$ とおく.

$$R(r) = C_1 e^{\lambda r} + C_2 e^{-\lambda r}$$

$$T(t) = C_3 e^{\lambda C_L t} + C_4 e^{-\lambda C_L t}$$ より.

ゆえに

$$\phi(r,t) = \frac{R(r)T(t)}{r} = \frac{(C_1 e^{\lambda r} + C_2 e^{-\lambda r})(C_3 e^{\lambda C_L t} + C_4 e^{-\lambda C_L t})}{r}$$

(ii) $\mu = 0$ のとき

$$R''(r) = T''(t) = 0$$ より

$$R(r) = C_1 r + C_2 \qquad T(t) = C_3 t + C_4$$

ゆえに

$$\phi(r,t) = \frac{R(r)T(t)}{r} = \frac{(C_1 r + C_2)(C_3 t + C_4)}{r}$$

(iii) $\mu < 0$ のとき

$\mu = -\lambda^2$ とおくと

$$R''(r) = -\lambda^2 R(r)$$

$$R(r) = C_1' e^{i\lambda r} + C_2' e^{-i\lambda r}$$

$$= C_1 \cos\lambda r + C_2 \sin\lambda r$$

$$(\because e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$$

同様に

$$T(t) = C_3 \cos\lambda C_L t + C_4 \sin\lambda C_L t$$

ゆえに

$\phi(r,t)$

$$= \frac{R(r)T(t)}{r}$$

$$= \frac{(C_1\cos\lambda r + C_2\sin\lambda r)(C_3\cos\lambda C_L t + C_4\sin\lambda C_L t)}{r}$$

(※ $\mu < 0$ の場合が1番大事)

4.標本調査

2021年5月10日 月曜日　　13:44

(1) $\overline{X} = \dfrac{\sum x}{10} = \dfrac{95}{10} = 9.5$

$S^2 = \dfrac{\sum (x-\overline{x})^2}{10} = \dfrac{8.5}{10} = 0.85$

$U^2 = \dfrac{\sum (x-\overline{x})^2}{10-1} = \dfrac{8.5}{9} = 0.944\ldots \approx 0.94$

(2) 材料を変更した製品の ~~母平均~~ をμとする。
μが元の製品の ~~母平均~~ 10に近いとみなせるかを判定する。

帰無仮説 $H_0 : \mu = 10$
対立仮説 $H_1 : \mu \neq 10$

統計量t

$$t = \frac{\hat{X} - \mu}{\sqrt{U^2/n}}$$

は自由度 $n-1$ のt分布に従う。

一方で、対立仮説 $H_1 : \mu \neq 10$ より
有意水準10%での棄却域Wは

$$W = (-\infty, -1.833], [1.833, \infty)$$

tの実現値は

$$\frac{\hat{X} - \mu}{\sqrt{U^2/n}} = \frac{9.5-10}{\sqrt{\frac{8.5}{9}/10}} = -0.5\sqrt{\frac{90}{8.5}}$$

$$= -5\sqrt{\frac{9}{85}}$$

$$= -\frac{15}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$$

$= -1.627$

これは W に含まれない。
したがって $H_0 : \mu \neq 10$ は棄却されないため、強度に変化があったとはいえない。