1.タンクモデル

2021年5月9日 日曜日　　10:42

(1)

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1(t)}{dt} = -\dfrac{5}{100}y_1 + \dfrac{5}{50}y_2 = -\dfrac{1}{20}y_1 + \dfrac{1}{10}y_2 \\
\dfrac{dy_2(t)}{dt} = \dfrac{5}{100}y_1 - \dfrac{5}{50}y_2 = \dfrac{1}{20}y_1 - \dfrac{1}{10}y_2
\end{cases}
$$

(2) 解を $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ とおくと

$$\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} Y = XY$$ とかける.

ここで 解が $Y = e^{\lambda t}A$ と表せるとして

$$\frac{dY}{dt} = \lambda e^{\lambda t} A$$

$$XY - \frac{dY}{dt} = Xe^{\lambda t}A - \lambda e^{\lambda t}A$$

$$= (X - \lambda E)e^{\lambda t}A = 0$$

よって $X - \lambda E = 0$ を解けばよい

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{20} - \lambda & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda = 0, -\frac{3}{20}$$

$\lambda = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{20} - \lambda & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルは

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$ よって $e^{\lambda t}A = e^{0}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -\frac{3}{20}$ のとき 同様に求めると.

固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$ よって $e^{\lambda t}A = e^{-\frac{3}{20}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

したがって、それらの線形結合により

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Y = e^{\lambda t}A = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{3}{20}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) $t=0$ のとき $y_1(0) = 2\,\mathrm{mol/L} \times 100\,\mathrm{L} = 200\,\mathrm{mol}$

$y_2(0) = 20\,\mathrm{mol/L} \times 50\,\mathrm{L} = 1000\,\mathrm{mol}$

よって $y_1(0) = 2C_1 + C_2 = 200$

$y_2(0) = C_1 - C_2 = 1000$

これを解いて $C_1 = 400 \quad C_2 = -600$

ゆえに $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 - 600\,e^{-\frac{3}{20}t} \\ 400 + 600\,e^{-\frac{3}{20}t} \end{pmatrix}$

(4) 条件 $y_1(t) > 600$

$$800 - 600e^{-\frac{3}{20}t} > 600$$

$$e^{-\frac{3}{20}t} < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{3}{20}t < \log\frac{1}{3}$$

$$t > \frac{20}{3}\log 3$$

$$= 7.33\ldots$$

超えるのは 7.4 min

2.常微分方程式

2021年5月9日 日曜日　　10:45

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \underbrace{8x^2+8}_{r(x)}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ の一般解は

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

求める方程式の一般解は

$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + y_p$ で表せる.

ここで特解 y_p を求める.

$r(x) = 8x^2+8$ より

$y_p = ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

これを与式に代入

$2a - 3(2ax+b) + 2(ax^2+bx+c) = 8x^2+8$

$2ax^2 + (2b-6a)x + (2c-3b+2a) = 8x^2+8$

$a=4$、$b=12$　$c=18$

ゆえに　$y_p = 4x^2 + 12x + 18$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + 4x^2 + 12x + 18$$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y - \cos x = 0$

$$\underbrace{\left(\frac{y}{x} - \cos x\right)}_{P} + \underbrace{1}_{Q}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1}{x} \longleftarrow$$ xのみの関数.

このとき積分因子 μ は

$$\mu = \exp\left[\int \frac{1}{x}\,dx\right] = \exp\left[\log|x|\right] = x$$

これを①に乗じる.

$$\underbrace{(y - x\cos x)}_{M} + \underbrace{x}_{N}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$ より完全微分形

このとき解を $u(x,y) = 0$ とすると.

$$M = \frac{\partial u}{dx} \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y}$$ である.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$du = 0$のとき

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$u = \int N\,dy = xy + k(x)$$

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{dk}{dx} = y - x\cos x$$

$$\frac{dk}{dx} = -x\cos x.$$

$$k = -x\sin x - \cos x + C$$

したがって

$$u = xy - x\sin x - \cos x + C = 0$$

(3) $$(2e^x + 4)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$dy = \frac{1}{2(e^x+2)}dx$$

$$\int dy = \int \frac{1}{2(e^x+2)}dx$$

$$y = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{e^x+2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^x}{e^x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \log|e^x+2|\right) + C$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\log|e^x+2| + C$$

3.偏微分方程式

2021年5月9日 日曜日　　11:48

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial y} + u \quad \cdots ①$$

B.C. $u(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$

解が　$u(x,y) = X(x)Y(y)$ と表せるとする。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)Y(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = X(x)Y'(y)$$

このとき①は

$$X'Y = 2XY' + XY$$

$$\frac{X'}{X} = \frac{2Y' + Y}{Y}$$

このとき左辺は x の関数、右辺は y の関数より、
等式が成り立つためには、ともに定数であることが必要

ここで $\frac{X'}{X} = \frac{2Y'+Y}{Y} = \mu$ とおく。

$\frac{X'}{X} = \mu$ より　$X' = \mu X$

$$X = C_1 e^{\mu x}$$

$\frac{2Y'+Y}{Y} = \mu$ より　$Y' = \frac{\mu - 1}{2} Y$

$$Y = C_2 e^{\frac{\mu-1}{2}y}$$

よって

$$u(x,y) = XY$$

$$= C_1 C_2 e^{\mu x} e^{\frac{\mu-1}{2}y}$$

$$= C_1 C_2 e^{\mu x} e^{\frac{\mu - 1}{2} y}$$

$$u(x, 0) = C_1 C_2 e^{\mu x}$$

$$\mu = -5, -3$$

よって

$$u(x, y) = 3 e^{-5x - 3y} + 2 e^{-3x - 2y}$$

4.確率

2021年5月9日 日曜日　12:26

(1) 確率変数Z

$$Z = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i$$ について

$$\mu_Z = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_{x_i} \qquad \sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \sigma_{x_i}^2$$

求める確率密度関数は

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_Z)^2}{\sigma_Z^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sum\alpha_i^2\sigma_{x_i}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-\sum\alpha_i\mu_{x_i})^2}{\sum\alpha_i^2\sigma_{x_i}^2}\right]$$

(2) 問1　8時間12分 = 8.2時間

$$A \xrightarrow[A_1]{} P \xrightarrow[A_2]{} B$$

$$A_{total} = A_1 + A_2 \leqq 8.2$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ として

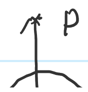
$$\mu_{A_{total}} = \sum \alpha\mu = 10$$

$$\sigma_{A_{total}}^2 = \sum \alpha^2\sigma^2 = 6$$

したがって確率変数 A_{total} は正規分布 $(10, (\sqrt{6})^2)$ に従う。

このとき $a = \dfrac{A_{total} - 10}{\sqrt{6}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

$$\frac{8.2-10}{\sqrt{6}} = \frac{-1.8}{\sqrt{6}} = -0.75 \quad (基準化)$$



求める確率は

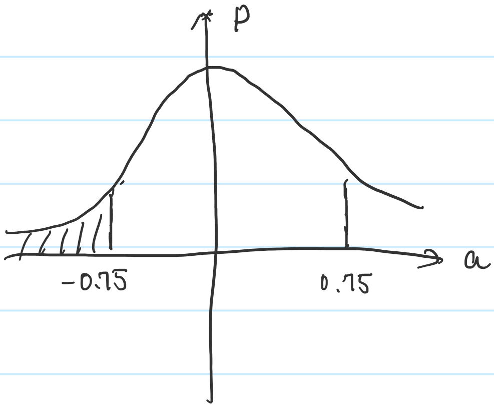
$P(A_{total} \leqq 8.2)$

$= P(a \leqq -0.75)$

$= P(a \geqq 0.75)$

$= 1 - \Phi(0.75)$

$= 1 - 0.773 = 0.227$



問2 $\mu_{B\,total} = 11$ $\sigma^2_{B\,total} = 3$

10時間9分 $= 10.15 \xrightarrow[\text{基準化}]{} \dfrac{10.15 - 11}{\sqrt{3}} \fallingdotseq -0.5$

12時間42分 $= 12.7 \longrightarrow \dfrac{12.7 - 11}{\sqrt{3}} \fallingdotseq 1$

求める確率は

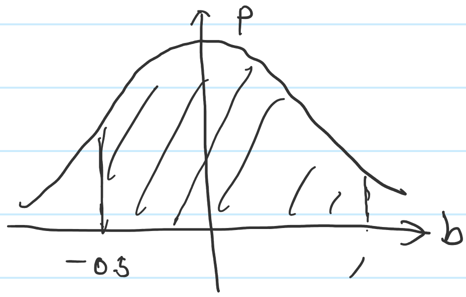
$P(10.15 \leqq B_{total} \leqq 12.7)$

$= P(-0.5 \leqq b \leqq 1)$

$= P(b \leqq 1) - P(-0.5 \leqq b)$

$= 0.841 - (1 - 0.691)$

$= 0.532$



問3 ルートa、bを比較する。

確率変数Cを

$C = A_{Total} - B_{total}$ とすると、

今回の条件は $C \leqq 0$

$C = A_1 + A_2 - B_1 - B_2$ より、$a_{A_1} \fallingdotseq a_{A_2} = 1$

$$C = A_1 + A_2 - B_1 - B_2 \text{ より } \begin{cases} a_{A_1} = a_{A_2} = 1 \\ a_{B_1} = a_{B_2} = -1 \end{cases}$$

$$\mu_C = 3 + 7 - 5 - 6 = -1$$

$$\sigma_C^2 = 2 + 4 + 1 + 2 = 9$$

0を基準化

求める確率は

$$P(C \leqq 0) = P\left(c \leqq \frac{1}{3}\right)$$

$$= 0.629$$