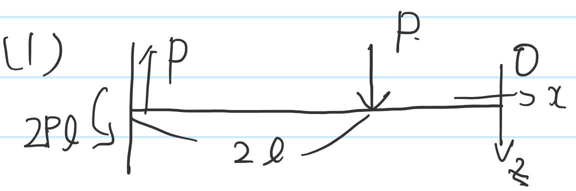
構造力学

2021年6月7日 月曜日　　午後2:42

1 (1)



せん断力 $S(x)$・曲げモーメント $M(x)$ は $-3l \leqq x \leqq -l$ で

原点位置注意

$$S(x) = P$$

$$M(x) = P(-x-l)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \text{ より}$$

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI} dx = \frac{P}{EI}\left(-\frac{x^2}{2} - lx\right) + C_1$$

$$y = \frac{P}{EI}\left(-\frac{x^3}{6} - \frac{l}{2}x^2\right) + C_1 x + C_2$$

ここで $y\Big|_{x=-3l} = 0$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-3l} = 0$ より　$C_1 = \frac{3Pl^2}{2EI}$、$C_2 = \frac{9Pl^3}{2EI}$

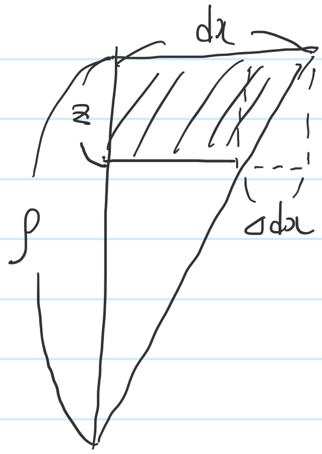
したがって

$$y = \frac{P}{EI}\left(-\frac{x^3}{6} - \frac{l}{2}x^2\right) + \frac{3Pl^2}{2EI}x + \frac{9Pl^3}{2EI}$$

求める変位は

$$y\Big|_{x=-l} = \frac{8Pl^3}{3EI} = \frac{32Pl^3}{Ebh^3}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$



(2) 軸方向ひずみ ε_{xx} について

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z}{\rho}$$

を満たす。ここで

$$z = \frac{h}{2},\quad \rho = \frac{EI}{M(-2l)} = \frac{EI}{Pl}$$

曲率半径 ρ について

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

として、

$$\varepsilon_{xx} = \frac{Plh}{2EI} = \frac{6Pl}{Ebh^2}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{Plh}{2EI} = \underline{\frac{6Pl}{Ebh^2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

別解

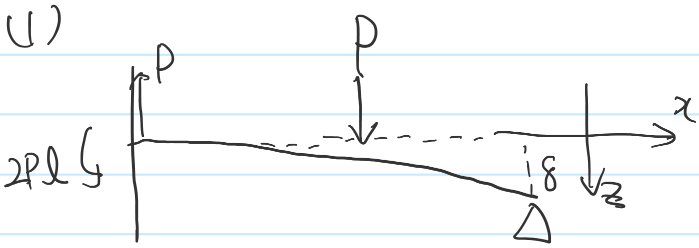
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M}{EI}y = \frac{Plh}{2EI} = \cdots$$

また、直角方向のひずみ ε_{yy} について

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} \text{ より}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{Plh}{2EI}\nu = \underline{-\frac{6Pl\nu}{Ebh^2}}$$

2. (1)



$-l \leqq x \leqq 0$ において

$$S(x) = 0$$

$$M(x) = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \text{ より} \qquad y = \iint \frac{M}{EI}dx = C_1x + C_2$$

$$y\Big|_{x=-l} = -C_1 l + C_2 = \frac{32Pl^3}{Ebh^3}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-l} = C_1 = \frac{24Pl^2}{Ebh^3} \qquad (\because 1\ (1) より)$$

以上より $\quad C_1 = \dfrac{24Pl^3}{Ebh^3}, \quad C_2 = \dfrac{56Pl^3}{Ebh^3}$

$$y\Big|_{x=0} = C_2 = \frac{56Pl^3}{Ebh^3} = \delta \quad より$$

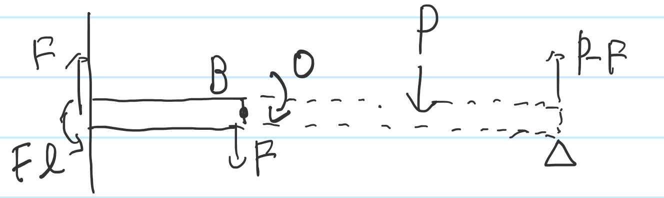
$$P = \underline{\frac{Ebh^3\delta}{56\,l^3}}$$

(2)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{6Pl}{Ebh^2} = \underline{\frac{3h\delta}{28\,l^2}}$$

(3) $\varepsilon_{xx}=0$ → 点Bでの曲げモーメントがゼロ

これを実現するPを探す。



固定端を中心とするモーメントのつり合い

$$Fl - 2Pl + 3l(P-F) = 0$$

$$Pl - 2Fl = 0$$

$$F = \frac{P}{2}$$

$-3l \leqq x \leqq -l$ で

$$S(x) = \frac{P}{2}$$

$$M(x) = \frac{P}{2}(-x-2l)$$

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI}\,dx = \frac{P}{2EI}\left(-\frac{x^2}{2} - 2lx\right) + C_1$$

$$y = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \frac{P}{2EI}\left(-\frac{x^3}{6} - lx^2\right) + C_1 x + C_2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-3l} = \frac{3Pl^2}{4EI} + C_1 = 0 \quad \text{より} \quad C_1 = -\frac{3Pl^2}{4EI}$$

$$\left.y\right|_{x=-3l} = C_2 = 0 \quad \text{より} \quad C_2 = 0$$

$-l \leqq x \leqq 0$ で

$$S(x) = -\frac{P}{2}$$

$$M(x) = \frac{P}{2}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI}\,dx = \frac{P}{4EI}x^2 + C_1$$

$$y = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \frac{P}{12EI}x^3 + C_1 x + C_2$$

$$y = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \frac{P}{12EI}x^3 + C_1 x + C_2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-l} = \frac{Pl^2}{4EI} + C_1 = 0 \quad \text{より} \quad C_1 = -\frac{Pl^2}{4EI}$$

$$\left. y \right|_{x=-l} = \frac{Pl^3}{6EI} + C_2 = \frac{Pl^3}{3EI} \quad \text{より} \quad C_2 = \frac{Pl^3}{6EI}$$

−3l ≦ x ≦ −l における関数との連続性

$$\left. y \right|_{x=0} = C_2 = \frac{Pl^3}{6EI} = \delta \quad \text{より}$$

$$P = \frac{6EI\delta}{l^3} = \frac{Ebh^3\delta}{2l^3}$$

⚠ 全体を通して、仮想仕事の原理 or Castigliano の定理を用いた方が楽。