筆答専門試験科目（午前）　　2022 大修

土木・環境工学系（基礎科目）

時間　10:00～11:30

注　意　事　項

1. 問題は全部で 3 題ある。すべての問題に解答せよ。
2. 解答は問題 1 に対して 2 枚の解答用紙を用い，問題 2 と問題 3 にそれぞれ 1 枚の解答用紙を使用して記入すること。
3. 各解答用紙には必ず受験番号および問題番号を記入せよ。
4. 問題冊子・下書き用紙は持ち帰ってよい。
5. 問題 1 の配点は 50 点，問題 2～3 の配点はそれぞれ 25 点，合計 100 点満点とする。

筆答専門試験科目（午前）　　2022 大修

土木・環境工学系（基礎科目）

時間　10:00〜11:30

1. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -8 \\ 9 & 6 & -7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$, $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$が与えられたとき，以下の問いに答えよ。

(1) $y(0) = 1$のとき，$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t)$の解を求めよ。

(2) $y(0) = 1$のとき，$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t) + e^{2t}$の解を求めよ。

(3) $\boldsymbol{A}$の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(4) $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$の解を求めよ。

(5) $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$の解を求めよ。

2. $0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$で定義された次の偏微分方程式 (1) を，与えられた境界条件・初期条件 (2) のもと，変数分離法により解け。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\pi,t) = 0, \qquad u(x,0) = 2\sin 3x - 4\sin 5x \tag{2}$$

3. 次の問い(1)～(4)に答えよ。解答に際しては，必要に応じて，

$$\sqrt{2}=1.41,\ \sqrt{3}=1.73,\ \sqrt{5}=2.24,\ \sqrt{13}=3.61$$

および下記の t 分布のパーセント点の表を用いよ。数値は小数点第一位まで求めよ。

(1) 大都市 A 市に住む世帯から 5 世帯を無作為に抽出し，ある年の 4 月のある一日を選んで，電力消費量を調査した。その結果，

12, 8, 13, 10, 12 (kWh/日)

のサンプルデータが得られた。母分散を未知として，母平均の 95%信頼区間を求めよ。

(2) 再び大都市 A 市に住む世帯から 5 世帯を無作為に抽出し，同じ年の 5 月のある一日を選んで，電力消費量を調査した。その結果，

11, 9, 12, 8, 10 (kWh/日)

のサンプルデータが得られた。(1)のサンプルと(2)のサンプルは 2 つの母集団から得られた独立な 2 つのサンプルとした場合，母平均の差の 95%信頼区間を求めよ。
なお，2 つの母集団の母分散は未知であるが等しいと仮定する。このとき，各サンプルのサンプル数をm, n, 平均を$\bar{x}$, $\bar{y}$, 不偏分散を$\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_y^2$, とすると，

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\,\hat{\sigma}}$$

は自由度$m+n-2$の t 分布にしたがうものとする。なお，

$$\hat{\sigma}^2=\frac{(m-1)\hat{\sigma}_x^2+(n-1)\hat{\sigma}_y^2}{(m-1)+(n-1)}$$

とする。

(3) (2)において抽出された 5 世帯が(1)において抽出された 5 世帯と同一であり，得られたサンプルデータも同じ順番(12, 11), (8, 9), (13, 12), (10, 8), (12, 10)で対応する場合，対応のある 2 つのサンプルとして，母平均の差の 95%信頼区間を求めよ。

(4) (2)と(3)の信頼区間が異なる理由を簡潔に述べよ。

表　t 分布のパーセント点

	上側確率				
自由度	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169

筆答専門試験科目（午後）　2022 大修

土木・環境工学系（専門科目）

時間　13:30～15:30

注　意　事　項

1. 問題は構造力学，水理学，土質力学，コンクリート工学，土木計画学，数理学の全部で 6 題ある。この中から 3 題を選択して解答せよ。
2. 解答は問題 1 題ごとに別々の解答用紙に記入せよ。1 題につき 2 枚まで用いてよい。なお，一部の問題には解答用紙に関するさらなる注意事項が書かれているので，それに従って解答せよ。
3. 各解答用紙には必ず受験番号および選択した問題名を記入せよ。
4. 貸与した電卓を使用してもよい。
5. 問題冊子・下書き用紙は持ち帰ってよい。
6. 各問題の配点はそれぞれ 100 点，合計 300 点満点とする。

筆答専門試験科目（午後）　2022 大修

土木・環境工学系（専門科目）　時間　13:30〜15:30

構造力学

1. 以下の問いに答えよ。

(1) 図1-1 に示すように，z 軸に関して対称な断面を持つはりが y 軸回りの曲げモーメント M を受けるとき，断面上の直応力 σ はある仮定の下で $\sigma=Mz/I$ によって表される。ただし，座標の原点は断面の図心にあるとし，I は y 軸回りの断面 2 次モーメントである。用いた仮定を示した上で，$\sigma=Mz/I$ を導け。

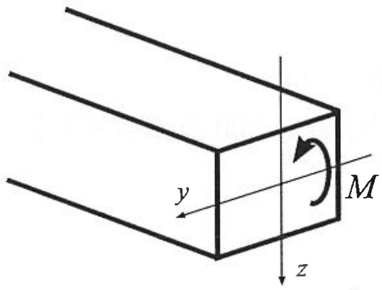


図 1-1 曲げモーメントを受けるはりの断面

(2) はりの中立軸とは何か，簡潔に説明せよ。また，軸力と曲げモーメントを受けるはりの断面における中立軸の位置の決め方を説明せよ。

(3) 図 1-2(a)と(b)は，線形弾性体からなる同じ構造体に対して，点 A に荷重 P が作用したときの変形と点 B にモーメント T が作用したときの変形をそれぞれ示したものである。図 1-2(a)における点 B でのたわみ角を θ_B とし，図 1-2(b)における点 A でのたわみを w_A とするとき，P, T, θ_B, w_A の間に成り立つ関係式を求めよ。また，その関係式を求めるために用いた定理について簡潔に説明せよ。

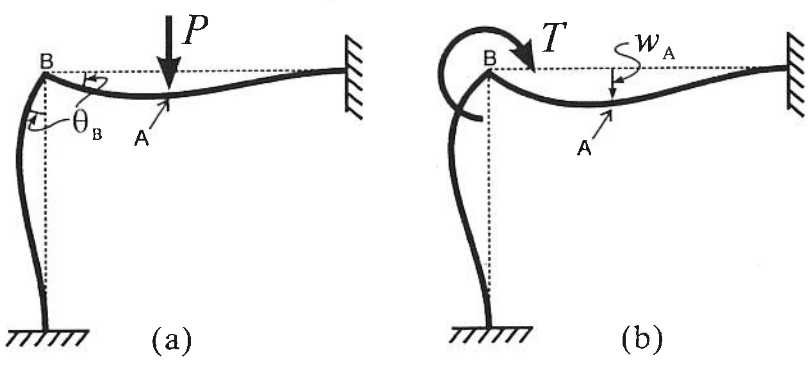


図 1-2 (a)荷重 P を受ける構造体の変形図，(b)モーメント T を受ける構造体の変形図

構造力学（続き）

2. 図 2-1に示す等分布荷重 q を受ける正方形断面はり（ヤング率 E, 断面の一辺 a）について，以下の問いに答えよ。なお，部材の自重およびせん断力による変形の影響は考慮しなくてよい。

(1) 断面力（軸力，曲げモーメント，せん断力）の分布を求め，図示せよ。

(2) 点 B および点 D での鉛直変位を求めよ。

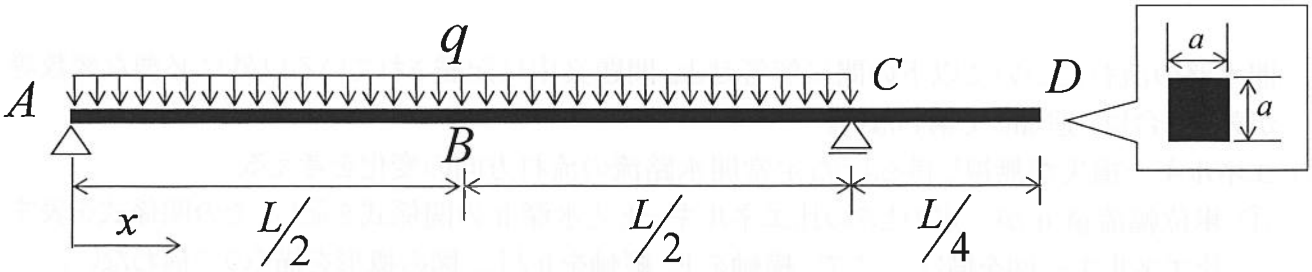


図 2-1 分布荷重を受けるはり

次に，たわみを制限するために，図 2-2 に示すように，点 B に長方形柱（長さ $L/3$, ヤング率 E, 断面の幅 d, 高さ $2d$）をピン結合（球座）により設置し，支えることとした。以下の問いに答えよ。

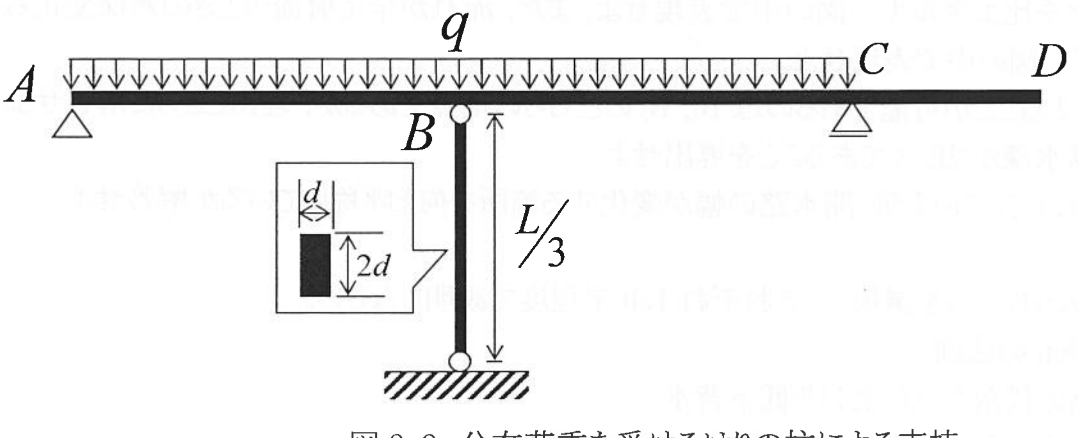


図 2-2 分布荷重を受けるはりの柱による支持

(3) 柱設置後の点 B での鉛直変位と柱に作用する軸力を求めよ。なお，ここでは，柱には座屈が生じないものとする。

(4) 柱に座屈が生じる等分布荷重 q を求めよ。（柱は長柱であると考えてよい。）

筆答専門試験科目（午後）　2022 大修

土木・環境工学系（専門科目）　時間 13:30～15:30

水理学

1.と 2.は別の解答用紙に解答せよ。

1. 開水路の流れについて以下の問に解答せよ。問題文中に記載されている以外に必要な変数等がある場合は，追加して構わない。

(1) エネルギー損失が無視し得るような定常開水路流の流れ方向の変化を考える。

① 単位幅流量 q が一定のときの比エネルギー E と水深 h の関係式を記し，その関係式を表す比エネルギー図を描け。ここで，横軸を E，縦軸を h とし，図の概形を描くので構わない。

② 開水路の幅が $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_1$（ただし，$B_1 > B_2$）と滑らかに変化するとき，①で描いた比エネルギー図を基に，この幅の変化に伴って生じる E と h の関係の変化を図で表現せよ。ただし，①の図上に重ねて描かず，②の解答として別に描くこと。ここで，開水路の水路床は水平で，断面は矩形とする。また，B_1 の地点と B_2 の地点のみについて図化するので構わない。

③ ②の解答の図を複製し，その図上で適当に一定値となる E を定め，流れが全て常流のときの水深変化を比エネルギー図の中で表現せよ。また，流れが全て射流のときの水深変化も比エネルギー図の中で表現せよ。

④ 限界水深をとることが可能であるのは B_1，B_2 のどちらの地点であるか，理由とともに解答せよ。

⑤ 一般に限界水深が 2E/3 であることを導出せよ。

⑥ 実河川において，このように開水路の幅が変化する箇所を何と呼称しているか解答せよ。

(2) 以下の語句等のうち二つを選択し，それぞれ 150 字程度で説明しなさい。

① Kleitz-Seddon の法則

② 緩勾配水路の段落ち部における低下背水

③ 等流の平均流速公式において径深が用いられる理由

水理学（続き）

2．図1のように貯水池，管路（円管），ポンプを設置して，水を貯水池 A から貯水池 B へ流量 1.0 m^3/s で送水する。ポンプから貯水池 B の水平距離は 1,200 m、水面の標高差は 100 m であり，円管の内径 d は 600 mm とする。ポンプから配水池 B までの区間に関して，以下の問に答えよ。重力加速度 g は 9.8 m/s^2，水の密度 ρ は 1,000 kg/m^3，水の動粘性係数 ν は 1.0×10^{6} m^2/s，摩擦損失係数 f は 0.05，曲がりによる損失係数 f_b は 2 ヶ所とも 0.1 とする。また，貯水池内のエネルギー損失および貯水池内の管路と水面の標高差は無視してよい。

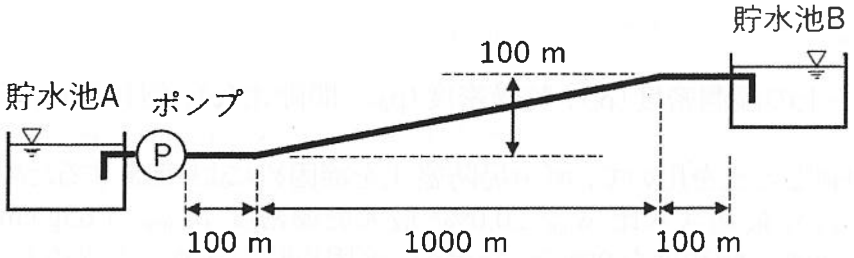


図1　2つの貯水池に接続された管路

(1) 上記の条件で送水すると管路内の流れは層流と乱流のどちらとなるか。根拠も含めて答えよ。

(2) ポンプから配水池 B の区間に関して，エネルギー線と動水勾配線を図示せよ。数値の記載は求めないが，管路と合わせて図示し，各線の形状に関する説明を簡潔に記載すること。

(3) ポンプに必要な全揚程（全水頭の増分）および動力（仕事率）を求めよ。ポンプの効率は 1.0 として計算せよ。導出過程も記述し，解答には単位を付けること。

(4) 流量を 1.0 m^3/s から徐々に減少させると，送水に必要な全揚程も徐々に変化するが，ある時点で全揚程が不連続に変化する。この不連続に変化する理由を簡潔に説明せよ。

(5) このように2つの貯水池からなる構造はインフラとして活用されている。このような構造を含む施設の例を2つ挙げよ。

問題訂正（試験中に指示済）
水理学 2. 4行目
誤 1.0×10^{6} m^2/s
↓
正 1.0×10^{-6} m^2/s

筆答専門試験科目（午後）　2022 大修

土木・環境工学系（専門科目）　時間 13:30～15:30

土質力学

1. ある地盤で $1\mathrm{m}^3$ の穴を掘り，掘削土の質量を計測したところ 2.0ton であった。また，この土の含水比(w)は 15%で，土粒子密度（ρ_s）は $2.7\mathrm{g/cm}^3$ であった。水の密度を $1.0\mathrm{g/cm}^3$ として，以下の問いに答えよ。

(1) 原位置における土の湿潤密度（ρ_t），乾燥密度（ρ_d），間隙比（e），飽和度（S_r）をそれぞれ求めよ。

(2) この地盤から掘削した土を用いて，河川堤防盛土を締固めにより築造するため，突き固めによる締固め試験を行い，最適含水比 w_{opt}=20.0%と最大乾燥密度 $\rho_{d\_max}=1.65\mathrm{g/cm}^3$ を得た。盛土の締固め度(D_c)を 95%，飽和度を 90%とした場合，締固め時の含水比を求めよ。

(3) 仕上がり体積 $10{,}000\mathrm{m}^3$ の盛土を築造するためには，地盤から何 ton の土を掘削する必要があるか求めよ。また，上記締固めのためには何 ton の水を加える必要があるか求めよ。なお，掘削，運搬過程で土の含水比は変化しないものとする。

(4) 締固めた地盤から土をサンプリングし，含水比を変えることなく不飽和状態で定圧一面せん断試験を行ったところ，せん断抵抗角 ϕ=30°，粘着力 c=10kPa を得た。このサンプリング試料を間隙比を変化させずに完全飽和した場合，強度はどのように変化するかを理由を含めて説明せよ。

2. 二次元の浅基礎の支持力は，粘着項，サーチャージ項と自重項に分けて求めることが多い。その考え方を用いて，図 1(a) と(b)に示す砂質土地盤上の二次元の浅基礎の極限支持力強度（圧力）をそれぞれ求めよ。なお，ϕ'=30° での支持力係数 N_c, N_q, N_γはそれぞれ 37.2, 22.5, 20.0 とする。また，水の単位体積重量γ_w は $10.0\mathrm{kN/m}^3$ とする。なお，(a)は，地下水位が極めて深い位置にある場合であり，(b)は地下水位が地表面にある場合である。

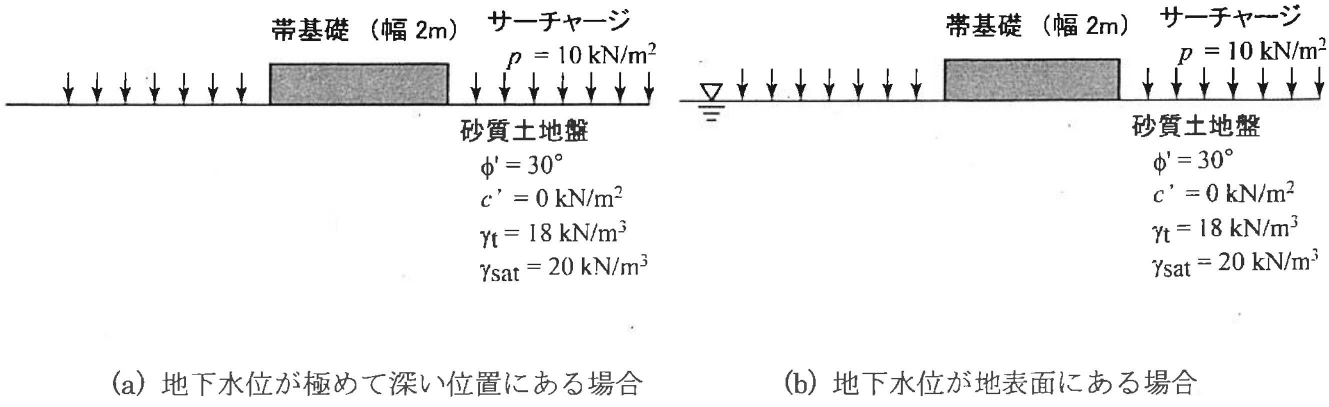


図 1　砂質土地盤上の二次元の浅基礎

土質力学（続き）

3. 図 2(a)に示すように，厚さ 5m の砂質土の下に厚さ 10m の粘土層が広範囲に堆積している地盤があり，現在の地下水位は砂質土層上端にある。しかし，粘土層は過去に正規圧密状態であり，その時の地下水位は粘土層上面位置にあり、その時の砂質土の単位体積重量γ_tは 16.0kN/m^{3}であった。その後，地下水位が上昇して現在の位置になっている。この地盤に高さ 5m の盛土を建設する計画がある(図 2(b))。盛土の建設によって生じる粘土層の圧密沈下について以下の問いに答えよ。なお，砂質土層と粘土層の特性は，図に示す通りである。また，水の単位体積重量γ_wは 10.0kN/m^{3}とする。計算にあたっては，粘土層中央部での応力状態を代表値として用いること。

(1) 現在の状況の粘土層の間隙比(e)と含水比(w)を求めよ。

(2) 現在の状況の粘土層の中央深度(z = −10m)での全鉛直応力，有効鉛直応力，先行圧密圧力を求めよ。

(3) 盛土建設による地盤の圧密沈下量を求めよ。

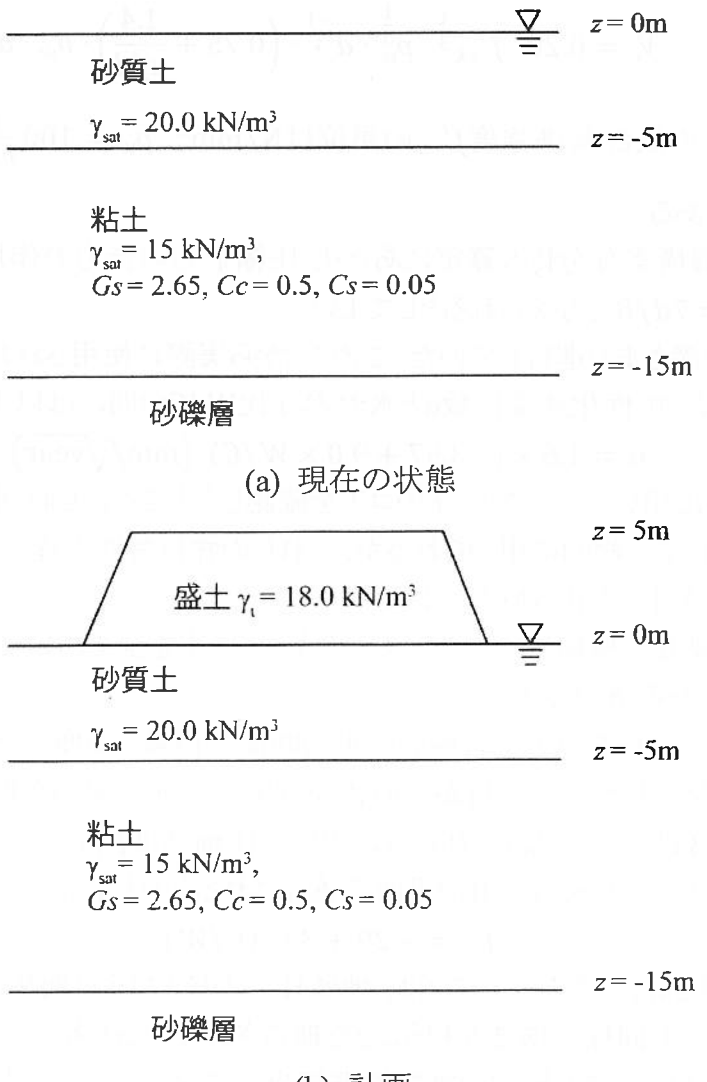


図 2 地盤条件

筆答専門試験科目(午後)　2022 大修

土木・環境工学系(専門科目)　時間 13:30～15:30

コンクリート工学

あるインフラの一部を構成する鉄筋コンクリート部材の点検を行ったところ，図 1 のように主引張鉄筋の一部だけに腐食が生じていることが発見された。本部材は，施工から50年が経過しており，この間に日射や降雨といった気象作用を受けている。この構造物に関して，以下の問いに答えよ。なお建設時の設計図書によると，コンクリートの設計基準強度f'_{ck}は24.0 N/mm^{2}とされ，設計水セメント比W/Cは0.55であった。この部材の寸法や，主引張鉄筋，せん断補強鉄筋の諸元は図 1 に示した通りである。また，この部材への荷重作用は矢印の点のみから与えられるものとし，部材の自重は無視してよい。

1. 修正トラス理論($V = V_s + V_c$)に基づき，設計せん断耐力$V(= P/2)$を計算せよ．なお補正項V_cは以下で与えられるとする。

$$V_c = 0.20 \cdot f'_{ck}{}^{\frac{1}{3}} \cdot p_w^{\frac{1}{3}} \cdot d^{\frac{-1}{4}} \cdot \left(0.75 + \frac{1.4}{a/d}\right) \cdot b_w \cdot d$$

ただし，コンクリートの設計基準強度f'_{ck}の単位はN/mm^2，$p_w = 100\frac{A_s}{b_w d}$，また$d^{\frac{-1}{4}}$に使う有効高さ$d$の単位はmである。
またここでのトラス機構寄与分V_sの算定にあたり，圧縮応力の合力の作用位置から引張鋼材図心までの距離は$z = 7d/8$で与えられるとしてよい。

2. 中性化が35 mmの深さまで進行していた。このことから実際に使用されたコンクリートの水セメント比W/Cを推定せよ。中性化速度係数αと水セメント比W/Cの間には以下の関係があるとする。

$$\alpha = 1.6 \times (-3.57 + 9.0 \times W/C)\ (\mathrm{mm}/\sqrt{\mathrm{year}})$$

3. 中性化深さの測定に用いたコンクリートのコアを確認したところ，玉砂利が使用されていた。現在は砕石が骨材として一般的に用いられるが，これらの骨材特性の違いがコンクリートの配合設計にどのような違いを生じさせるか述べよ。

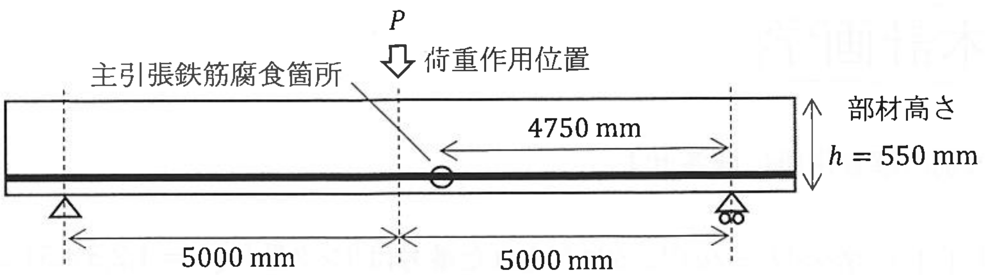
4. 中性化に伴う鋼材腐食の機構について，以下のキーワードを全て用いて説明せよ。
キーワード：不動態皮膜，酸素，水

5. 腐食箇所断面における6本の主引張鉄筋の平均断面欠損量が10%であった。鉄筋とコンクリートの付着等は健全なままとして，部材が現時点で保有する曲げ耐力を推定せよ。コンクリートの終局ひずみは0.0035とする。なお現在のコンクリート圧縮強度f'_cは，2.で推定された水セメント比W/Cに基づき，以下のセメント水比法則から推定されるものとする。

$$f'_c = -29 + 33 \cdot (C/W)$$

6. この鉄筋コンクリート部材を含むインフラは，地域社会の核となる重要施設であり，これから 100 年後の社会においても同様の機能を担うことを期待されていると考えられる。このインフラの維持管理に関して，あなたがこの施設の維持管理担当者になったとして，どのような考えのもとで，どのような具体的対応措置をとるかを 300 字程度で述べよ。

コンクリート工学（続き）



※上図ではせん断補強鉄筋の記載は省略されている。

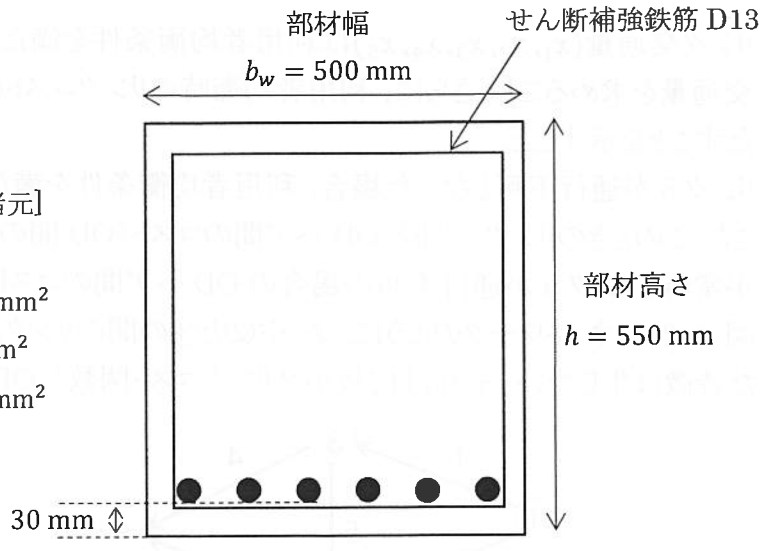
せん断補強鉄筋　D13
せん断補強鉄筋間隔　$s = 250$ mm
せん断補強筋筋の形状は(b)に示すような
フープ型

[D13 鉄筋 1 本あたりの諸元]
公称直径　12.7 mm
公称断面積　$A_w = 126.7\ \mathrm{mm}^2$
降伏強度　$f_{wy} = 295\ \mathrm{N/mm}^2$
ヤング率　$E_s = 200\ \mathrm{kN/mm}^2$

(a) 側面図

主引張鉄筋　D32×6 本

[D32 鉄筋 1 本あたりの諸元]
公称直径　31.8 mm
公称断面積　$A_s = 794.2\ \mathrm{mm}^2$
降伏強度　$f_y = 345\ \mathrm{N/mm}^2$
ヤング率　$E_s = 200\ \mathrm{kN/mm}^2$



(b) 部材軸直交方向断面図

図 1 鉄筋コンクリート部材の諸元

筆答専門試験科目（午後）　2022 大修

土木・環境工学系（専門科目）

時間　13:30〜15:30

土木計画学

1と2は別の解答用紙に解答せよ。

1．図 1-1 のネットワークのリンクに付された番号はリンク番号($a = 1,2,3,4,5$)である。x_aをリンクaの交通量とするとき，リンクコスト関数（リンク旅行時間関数）は当該リンクの交通量の関数$t_a(x_a)$である。ノード①からノード④にのみ OD 需要($\mathrm{q} = 6$)があるとする。以下の問いに答えよ。

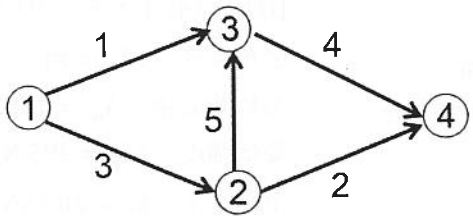


図 1-1　ネットワーク 1

リンクコスト関数

$$t_1(x_1) = 50 + x_1$$
$$t_2(x_2) = 50 + x_2$$
$$t_3(x_3) = 10x_3$$
$$t_4(x_4) = 10x_4$$
$$t_5(x_5) = 10 + x_5$$

(1) リンク交通量(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)は利用者均衡条件を満たすとする。$x_1 = 2$のとき，残りのリンクの交通量を求めること。さらに，利用者均衡時のリンクコストを求め，交通流が利用者均衡条件を満たすことを示すこと。

(2) リンク 5 が通行不可となった場合，利用者均衡条件を満たすリンク交通量(x_1, x_2, x_3, x_4)を求めること。このときのリンクコストと OD ペア間のコスト（OD 間の旅行時間）を求めること。

(3) 平常時とリンク 5 が通行不可の場合の OD ペア間のコストを比較してその特徴を述べること。

(4) 図 1-2 のネットワークのように，ノード②と③の間のリンクが逆方向であった場合，上記(3)で述べた特徴は生じない。それは何故か？リンクコスト関数と OD 需要は変わらないとする。

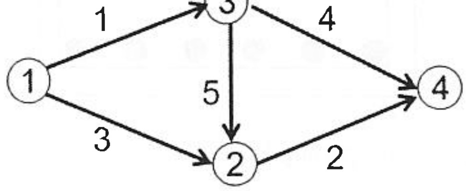


図 1-2　ネットワーク 2

土木計画学（続き）

2. 孤立した信号交差点，すなわち十分に長い単路の最下流部に交差点と信号機があり，交差点の下流からの影響はない状況を考える。信号の現示は赤が 60 秒，青が 80 秒，黄がゼロ秒であるとする。最上流部から一定の流率 0.5 台/秒で車両が到着しつづけるとする。道路の流率密度関係は図 2-1 であるとし，車両はこの関係に従い瞬間的に速度を変更するとする。このとき，以下の問いに答えよ。

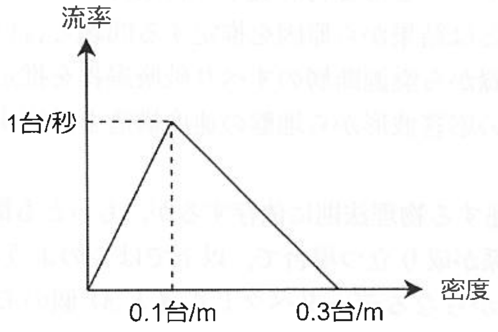


図 2-1：流率密度関係

(1) 車両の最大速度を求めよ。

(2) どのような信号待ち行列が形成されるかを考える。まず，一回の赤信号の影響で車両が停止する領域を時空間図（横軸に時間，縦軸に空間を取った図）上でその特徴がわかるようにおおまかに示せ。次に，その領域は最大でどの位置まで到達するかを停止線からの距離で求めよ。

(3) 車両がどのような走行をするかを考える。信号が青から赤に変わった瞬間に停止線の上流 300 m にいる車両に着目する。まず，この車両の軌跡を(2)で描いた時空間図上に重ねる形でその特徴がわかるようにおおまかに示せ。次に，この車両が上流 300 m を通過してから停止線を通過するまでにかかる時間を求めよ。

(4) 高度な自動運転技術が普及すると，孤立した信号交差点周辺の交通流は大きく変化する可能性がある。具体的な技術を一つ挙げ，それによりどのような変化が生じうるか，100 字以上 150 字程度以下で説明せよ。信号待ち行列にも触れること。

筆答専門試験科目（午後）　2022 大修

土木・環境工学系（専門科目）　時間 13:30～15:30

数理学

なんらかの物理現象の結果としてなんらかの物理量が測定された場合，得られた観測データからその物理現象を規定する未知のパラメータ (以下，モデルパラメータと呼ぶ) を推定しようとする問題を逆問題と呼ぶ。観測データをある物理現象の結果とするならば，モデルパラメータはその原因と言えるので，逆問題とは結果から原因を推定する問題と言い換えることができる。たとえば，地震動の時刻歴波形記録から震源断層のすべり破壊過程を推定する問題や，地表面を強打して別の場所で測定されたその応答波形から地盤の速度構造を推定する問題などは逆問題の一例である。

逆問題の定式化は現象を記述する物理法則に依存するが，もっとも簡単な問題はモデルパラメータと観測データの間に線形関係が成り立つ場合で，以下ではこのような線形問題について考える。すなわち，N 個の観測データからなるデータベクトル $\boldsymbol{d}$ と M 個のモデルパラメータからなるモデルベクトル $\boldsymbol{m}$ の間に，

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{m} \tag{a}$$

なる関係が成立する問題を扱う。ここで $\boldsymbol{G}$ はデータ核と呼ばれ $N \times M$ の行列，$\boldsymbol{d}$ および $\boldsymbol{m}$ はそれぞれ N 次および M 次の列ベクトルである。

以下の問いに答えよ。なお，計算の過程で正方行列を取り扱う際には，説明なく正則であるとみなしてよい。

1. $N = M$ の場合について，モデルベクトル $\boldsymbol{m}$ をデータ核 $\boldsymbol{G}$ およびデータベクトル $\boldsymbol{d}$ を用いて表わせ。
2. $N > M$ の場合，すなわち，未知のモデルパラメータの数よりも，観測データの数が多い場合は，最小自乗法により観測データを最もよく説明するモデルパラメータを解とする。以下の問いに答えよ。

   (1) モデルパラメータから理論的に期待される値と観測データの差の自乗和 ϕ を d_i, m_j, G_{ij} $(i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, M; N, M \in \mathbb{N})$ を用いて表わせ。ただし，d_i, m_j はそれぞれ $\boldsymbol{d}$ の i 番目，$\boldsymbol{m}$ の j 番目の要素，G_{ij} は $\boldsymbol{G}$ の ij 要素である。

   (2) ϕ を最小とするための条件を示せ。

   (3) ϕ が最小となるためには，

   $$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{M} G_{ij} m_j\right) G_{ik} = \sum_{i=1}^{N}(d_i G_{ik}) \tag{b}$$

   を満足する m_j を求めればよいことを示せ。ただし，m_j が式 (b) とは異なる式を満足すべきであると考える場合は適切な式を誘導せよ。

   (4) ϕ を最小とするモデルベクトル $\boldsymbol{m}$ の解を $\boldsymbol{G}$ と $\boldsymbol{d}$ を用いて表わせ。

数理学　(続き)

3. 図 1 に示すように 2 層からなる半無限弾性体の表面を打撃したとき，打撃点 (震源) S から距離 D_i だけ離れた地点 R_i $(i = 1, \ldots, N)$ で観測される弾性波の走時 (伝播に要する時間) T_i は次式で表わされる。

$$T_i = x + yD_i \tag{c}$$

このとき，x は上層の弾性体の層厚, y は下層の弾性波速度にかかわるパラメータであり，N ヶ所で弾性波の走時 T_i を観測することでこれら 2 つのモデルパラメータを推定したい。表 1 に示す観測データが得られたものとして，以下の問いに答えよ。

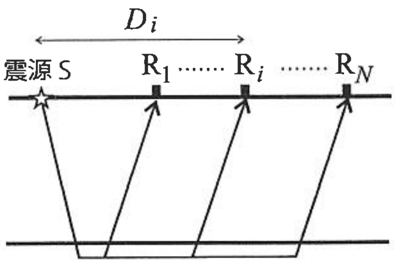


図 1　震源と観測点

表 1　震源と観測点の距離 D_i および走時 T_i

観測点 R_i	R_1	R_2	R_3	R_4
距離 D_i [m]	2	4	6	8
走時 T_i [ms]	12.9	18.5	22.7	24.4

(ms = ミリ秒)

(1) R_2 と R_4 の 2 地点のみでデータが得られた場合 $(N = 2)$，x [ms], y [ms/m] の最適解を求めよ。

(2) R_1〜R_4 の 4 地点でデータが得られた場合 $(N = 4)$，x [ms], y [ms/m] の最適解を求めよ。