N を正の整数とする。$2N$ 個の項からなる数列

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_N, b_1, b_2, \cdots, b_N\}$$

を

$$\{b_1, a_1, b_2, a_2, \cdots, b_N, a_N\}$$

という数列に並び替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並び替えた数列は b_1 を初項とし、b_i の次に a_i、a_i の次に b_{i+1} が来るようなものになる。また、数列 $\{1, 2, \cdots, 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において、数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す。

たとえば、$N = 3$ のとき、$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ をシャッフルすると $\{4, 1, 5, 2, 6, 3\}$ となるので、$f(1) = 2$、$f(2) = 4$、$f(3) = 6$、$f(4) = 1$、$f(5) = 3$、$f(6) = 5$ である。

(1) 数列 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。

(2) $1 \leq k \leq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し、$f(k) - 2k$ は $2N + 1$ で割り切れることを示せ。

(3) n を正の整数とし、$N = 2^{n-1}$ のときを考える。数列 $\{1, 2, 3, \cdots, 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると、$1, 2, 3, \cdots, 2N$ にもどることを証明せよ。

(2002 東大)

(1) シャッフル 1 回目

$$\{5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4\}$$

シャッフル 2 回目

$$\{7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2\}$$

シャッフル 3 回目

$$\{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$$

（もう 3 回シャッフルしたらもとに戻りそう !?）

(2) (a) $1 \leq k \leq N$ のとき
$f(k) = 2k$ より $f(k) - 2k = 0$ であるからこれは $2N+1$ で割り切れる。

(b) $N+1 \leq k \leq 2N$ のとき
$f(k) = 2(k-N) - 1 = 2k - 2N - 1$ より $f(k) - 2k = -2N - 1 = -(2N+1)$ であるからこれは $2N+1$ で割り切れる。

ゆえに、$1 \leq k \leq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し、$f(k) - 2k$ は $2N+1$ で割り切れる。

(3) (2) より

$$f(k) \equiv 2k \quad (mod \quad 2N+1)$$

したがって、$2n$ 回シャッフルしたら、k の場所 $f_{2n}(k)$ は

$$f_{2n}(k) = f(f(\cdots f(k))) \equiv 2^{2n}k \quad (mod \quad 2N+1)$$

になる。[1] ここで $N = 2^{n-1}$ より上式は

$$\begin{aligned}
f_{2n}(k) &\equiv 2^{2n}k \quad (mod \quad 2^n+1)\\
&\equiv 2^n(2^n+1-1)k \quad (mod \quad 2^n+1)\\
&\equiv 2^n(2^n+1)k - 2^nk \quad (mod \quad 2^n+1)\\
&\equiv -2^nk \quad (mod \quad 2^n+1)\\
&\equiv -(2^n+1-1)k \quad (mod \quad 2^n+1)\\
&\equiv -(2^n+1)k + k \quad (mod \quad 2^n+1)\\
&\equiv k \quad (mod \quad 2^n+1)
\end{aligned}$$

である。ここで、$1 \leq f_{2n}(k) \leq 2N = 2^n$ より[2]

$$f_{2n}(k) = k$$

である。[3]ゆえに、任意の k を $2n$ 回シャッフルしたときの場所 $f_{2n}(k)$ が k であり、もとの数に等しいから、数列全体としてもとに戻っていることが示せた。

[1] 1 回のシャッフルで $f(k) = 2k$,2 回のシャッフルで $f(f(k)) = 2(2k) = 2^2k$, 3 回のシャッフルで . . .
[2] k 個の数並び替えても各々は 1〜k 番目ですよね
[3] 例えば、5 で割った余りが 3 だからといっても、もとの数は 3 かもしれないし 8 かもしれない。しかし、もとの数が 0 から 4 の間と決まっているならばもとの数は 3 だと決定できるはずである。