$x-y$ 平面において、x 座標、y 座標が共に整数である点 (x,y) を格子点という。いま、互いに異なる 5 個の格子点を任意に選ぶと、その中に次の性質をもつ格子点が少くとも一対は存在することを示せ。

一対の格子点を結ぶ線分の中点がまた格子点となる。

(1996 早稲田)

キーワード：　鳩ノ巣の原理

「少くとも」の「な」が抜けているのは誤字ではない。原文通りである。

格子点である 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ の中点は $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ である。中点もまた格子点となるには、$x_1 + x_2, y_1 + y_2$ がともに偶数となればよい。

ここで、2 つの数の和が偶数となるためには、ともに奇数であるかともに偶数であればよい。すなわち、2 つの数の偶奇が一致すればよい。2 点のとりうるパターンは

- (奇数, 奇数)
- (奇数, 偶数)
- (偶数, 奇数)
- (偶数, 偶数)

の 4 通りである。

ここで、今回互いに異なる 5 個の格子点を任意に選んだとき、5 個の格子点は 4 通りいずれかに分類される。このとき、どれか 1 通り以上は 2 つの点が属することとなり、その場合、同じパターンに分類された 2 点について中点が格子点となる。

よって題意の通り、互いに異なる 5 個の格子点を任意に選ぶと、その中に次の性質をもつ格子点が少くとも一対は存在する。(終)

コメント:「鳩ノ巣の原理」を知っているか。出題頻度は少ないが出題された際には、授業だけしか力を入れていないか問題演習もきちんとこなしているかではっきり差が出そうである。この問題は有名問題で、このテーマを扱うとき必ずこの問題が出される、くらい有名。

「鳩ノ巣の原理」のよくある例として、10 個の玉を 9 個の箱に入れる場合がある。このとき、箱の方が少ないから、少なくとも 1 箱は 2 個以上玉が入った状態になるはずである。