4 辺のうち、3 辺の長さが a である台形の面積の最大値は

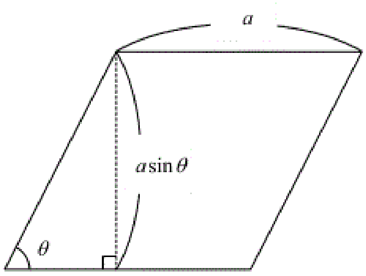
$$\frac{\boxed{1}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{3}}a^{\boxed{4}}$$

である。　(2020 埼玉医科)

4 辺のうち、3 辺の長さが a である台形の面積の最大値？

台形はどちらかの対辺 1 組が平行な四角形である。また今回は 3 辺の長さが平行であるため、どちらかの対辺 1 組の長さが等しい。

(I) 平行な対辺 1 組について長さもまた等しい $(=a)$ とき
このとき、図形は底辺 a の平行四辺形となる。

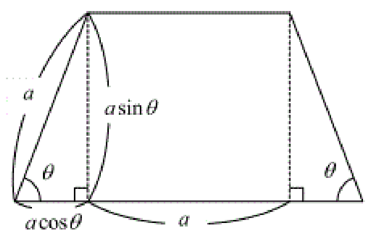


$$S_0 = a \cdot a\sin\theta = a^2\sin\theta$$

$0 < \sin\theta \leq 1$ より $S_0 \leq a^2$

(II) 平行な対辺 1 組とは別の対辺 1 組の長さが等しい $(=a)$ とき
このとき、図形は台形（ただし上底 $\neq$ 下底）

(i) 短辺が a のとき



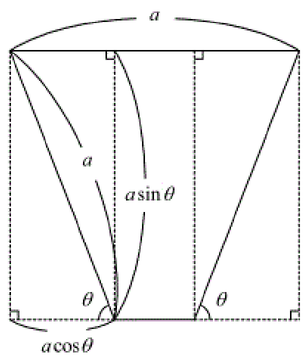
面積は台形の公式（$\frac{1}{2}$(上底+下底)$\times$ 高さ）を用いれば

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(a+a+2a\cos\theta)a\sin\theta \\ &= a^2(\sin\theta + \sin\theta\cos\theta) \\ \frac{dS_1}{d\theta} &= a^2(\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= a^2(\cos\theta + \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta) \\ &= a^2(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) \\ &= a^2(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) \end{aligned}$$

θ	0	$\cdots$	$\pi/3$	$\cdots$	$\pi/2$
$dS_1/d\theta$		$+$	0	$-$	
S_1		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ゆえに $S_1 \leq S_1\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(ii) 長辺が a のとき



$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}(a+a-2a\cos\theta)a\sin\theta \\ &= a^2(\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) \end{aligned}$$

ここで、$0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において $\sin\theta\cos\theta > 0$ より

$$a^2(\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) < a^2(\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)$$
$$S_2 < S_1$$

であるから S_2 の最大値が S_1 を超えることはない。

以上より $S_1, S_2, (S_3)$ を比較して最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ である。

$\boxed{1}\cdots 3$　$\boxed{2}\cdots 3$　$\boxed{3}\cdots 4$　$\boxed{4}\cdots 2$

コメント：図形問題は結局自分でいろんなパターンを描いて考えてみること。描いてみないと、「この図形のパターンとあの図形のパターンは計算が変わるなあ」というのに気づかないだろう。このような短い問題文の場合、問題からは糸口がつかめないため、実験をする手がかりを探ろう。