座標平面上において、円 $C: x^2+y^2+2kx+(k+2)y-\frac{1}{4}k-\frac{1}{4}=0$($k$ は実数) を考える。

(1) 円 C の半径の最小値は、$k=$ $\boxed{\ 1\ }$ のとき $\boxed{\ 2\ }$ である。

(2) k の値にかかわらず、円 C の中心は、常に直線 $y=$ $\boxed{\ 3\ }$ 上にある。

(3) k の値にかかわらず、円 C は常に 2 つの定点を通る。この定点の x 座標は $\boxed{\ 4\ }$ と $\boxed{\ 5\ }$ である。ただし、$\boxed{\ 4\ } < \boxed{\ 5\ }$ とする。

(2019 久留米)

(1) 円の方程式を平方完成し標準形 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ に整理する。

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2kx+(k+2)y-\frac{1}{4}k-\frac{1}{4}&=0 \\ (x+k)^2-k^2+\left(y+\frac{k+2}{2}\right)^2-\frac{(k+2)^2}{4}-\frac{1}{4}k-\frac{1}{4}&=0 \\ (x+k)^2+\left(y+\frac{k+2}{2}\right)^2&=\frac{5}{4}k^2+\frac{5}{4}k+\frac{5}{4} \end{aligned}$$

したがって円 C の半径 r について

$$\begin{aligned} r^2&=\frac{5}{4}k^2+\frac{5}{4}k+\frac{5}{4} \\ &=\frac{5}{4}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{16} \end{aligned}$$

したがって $r^2\geq\frac{15}{16}$ より $k=-\frac{1}{2}$ のとき r は最小値 $\frac{\sqrt{15}}{4}$ をとる。

(2) 円の中心は $\left(-k,-\frac{k+2}{2}\right)$ である。ここで、$x=-k, y=-\frac{k+2}{2}$ として k を消去すれば

$$\begin{aligned} y&=-\frac{-x+2}{2} \\ y&=\frac{1}{2}x-1 \end{aligned}$$

を得る。

(3) k について円の方程式を整理すると

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2kx+(k+2)y-\frac{1}{4}k-\frac{1}{4}&=0 \\ k\left(2x+y-\frac{1}{4}\right)+\left(x^2+y^2+2y-\frac{1}{4}\right)&=0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{cases} 2x+y-\frac{1}{4}=0 \\ x^2+y^2+2y-\frac{1}{4}=0 \end{cases}$$

を満たすとき k の値にかかわらず与式が成立する。これを解いて（上式を $y=$ にして下式に代入すれば変数減って解ける）

$$(x,y)=\left(\frac{2\pm\sqrt{3}}{4},-\frac{3\pm2\sqrt{3}}{4}\right)\text{(複合同順)}$$

より求める x 座標は $x=\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$ である。

$\boxed{1}$: $-\frac{1}{2}$　$\boxed{2}$: $\frac{\sqrt{15}}{4}$　$\boxed{3}$: $\frac{1}{2}x-1$　$\boxed{4}$: $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$　$\boxed{5}$: $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

コメント：(1)(2) は拾えてほしい。(3) は出来が左右されるか。定点を通る系統の問題は一度触れたことはあるはずである。最後の計算に注意。