放物線 $y = x^2 - 2ax + 2a$ を考える。この放物線の頂点が、4 点 $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ を頂点とする正方形の周または内部にあるような定数 a の値の範囲を求めなさい。　(2019 龍谷)

とりあえず放物線 $y = x^2 - 2ax + 2a$ を平方完成してみる。

$$y = x^2 - 2ax + 2a = (x-a)^2 - a^2 + 2a$$

したがって、頂点の座標は $(x, y) = (a, -a^2 + 2a)$

$$\begin{cases} x = a \\ y = -a^2 + 2a \end{cases}$$

(※一種の媒介変数表示)

ここで、頂点の x 座標について $-1 \leq x \leq 1$ より、$-1 \leq a \leq 1$ である。
　また頂点の y 座標について $-1 \leq y \leq 1$ より

$$-1 \leq -a^2 + 2a \leq 1$$

これを解いて $1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2}$
　ゆえに $-1 \leq a \leq 1$ とあわせて

$$1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1$$