次の $\boxed{}$ を埋めよ。ただし、**解答用紙には計算過程も示せ。**

(1) $0 \leqq \alpha < 2\pi, 0 \leqq \beta < 2\pi$ とする。$1, \cos^2\alpha, \sin\alpha$ がこの順で等差数列となるような α をすべて求めると、$\alpha = \boxed{\text{ア}}$ となる。また、$1, \sin\beta, \cos^2\beta$ がこの順で等比数列となるような β をすべて求めると、$\beta = \boxed{\text{イ}}$ となる。

(2) 3 点 $A(6,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6)$ がある。原点を O とするとき、$\triangle OAB$ の重心 G_a の座標は $\boxed{\text{ウ}}$、$\triangle OBC$ の重心 G_b の座標は $\boxed{\text{エ}}$、$\triangle OAC$ の重心 G_c の座標は $\boxed{\text{オ}}$ となる。また、3 点 G_a, G_b, G_c を通る平面 α に原点 O から垂線 l を下ろす。垂線 l と平面 α の交点を H とするとき、H の座標は $\boxed{\text{カ}}$ となる。

(2019 東京都市大)

(1) $1, \cos^2\alpha, \sin\alpha$ がこの順で等差数列より、公差が一定であるから

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha - 1 &= \sin\alpha - \cos^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - \sin\alpha - 1 &= 0 \\ 2(1-\sin^2\alpha) - \sin\alpha - 1 &= 0 \\ -2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 &= 0 \\ -(2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha + 1) &= 0 \\ \sin\alpha &= \frac{1}{2}, -1\end{aligned}$$

以上より、$\alpha = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$　$\boxed{ア}$: $\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$

また、$1, \sin\beta, \cos^2\beta$ がこの順で等比数列より、公比が一定であるから

$$\begin{aligned}\frac{\sin\beta}{1} &= \frac{\cos^2\beta}{\sin\beta} \\ \sin^2\beta &= \cos^2\beta \\ \sin^2\beta &= 1 - \sin^2\beta \\ 2\sin^2\beta &= 1 \\ \sin\beta &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

以上より、$\beta = \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$　$\boxed{イ}$: $\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

(2) 座標 X_A, X_B, X_C で表される点 A, B, C の重心 G の座標 X_G は

$$X_G = \frac{X_A + X_B + X_C}{3}$$

により求められるから、$G_a(2,1,0), G_b(0,1,2), G_c(2,0,2)$ である。

また、点 H は平面 α 上より、実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G_aH} &= s\overrightarrow{G_aG_b} + t\overrightarrow{G_aG_c} \\ \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OG_a} + s\overrightarrow{G_aG_b} + t\overrightarrow{G_aG_c} \\ &= (2,1,0) + s(-2,0,2) + t(0,-1,2) \\ &= (2-2s, 1-t, 2s+2t)\end{aligned}$$

ここで、垂線 l すなわち OH と平面 α は垂直であるから、平面 α 上の 2 直線を取り出せば

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{G_aG_b} &= 0 \\ \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{G_aG_c} &= 0\end{aligned}$$

である。成分表記すれば

$$\begin{aligned}(2-2s, 1-t, 2s+2t) \cdot (-2,0,2) &= 8s + 4t - 4 = 0 \\ (2-2s, 1-t, 2s+2t) \cdot (0,-1,2) &= 4s + 5t - 1 = 0\end{aligned}$$

これを解いて $s = \frac{2}{3}, t = -\frac{1}{3}$、ゆえに $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$,　$H\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\boxed{ウ}$: $(2,1,0)$　$\boxed{エ}$: $(0,1,2)$　$\boxed{オ}$: $(2,0,2)$　$\boxed{カ}$: $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

コメント:おそらく (1) は落としたらかなりマズい。得点問題。(2) は重心は絶対出来てほしいが H を求めるところは明暗は分かれると思う。斜め方向の垂直＆座標が出てくる問題はベクトルが有効だと気づけるか。