4 つの関数 $f_1(x)=x^2-2x, f_2(x)=x^2+2x, f_3(x)=-x^2, f_4(x)=4-x^2$ について以下の問に答えよ。ただし、解答用紙には計算過程も示せ。

(1) $y \geq f_1(x)$ または $y \geq f_2(x)$ を満たし、なおかつ $y \leq f_3(x)$ を満たす領域 D_1 を座標平面上に図示せよ。ただし、3 つの放物線 $y=f_1(x), y=f_2(x), y=f_3(x)$ について、各放物線と軸との交点の座標もかくこと。

(2) 領域 D_1 の面積を求めよ。

(3) $y \geq f_1(x)$ または $y \geq f_2(x)$ を満たし、なおかつ $y \leq f_4(x)$ を満たす領域 D_2 を座標平面上に図示せよ。ただし、3 つの放物線 $y=f_1(x), y=f_2(x), y=f_4(x)$ について、各放物線と軸との交点の座標もかくこと。

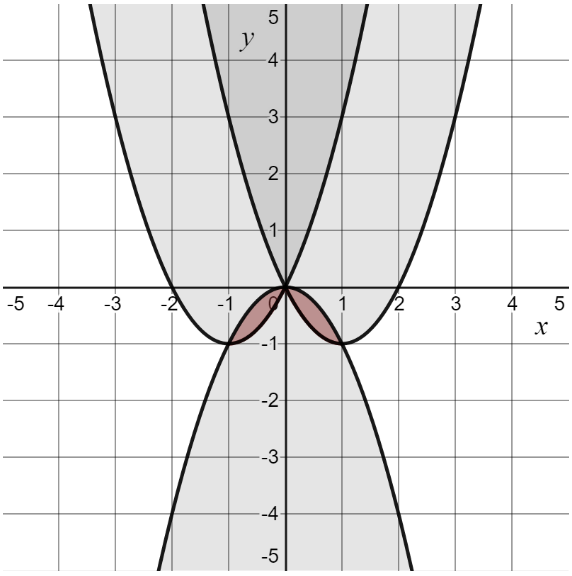
(4) 領域 D_2 の面積を求めよ。

(2019 東京都市大)

No.6　解答

コメント：「または」と「かつ」を混同しないように。それ以外は典型的な積分問題。

(1)

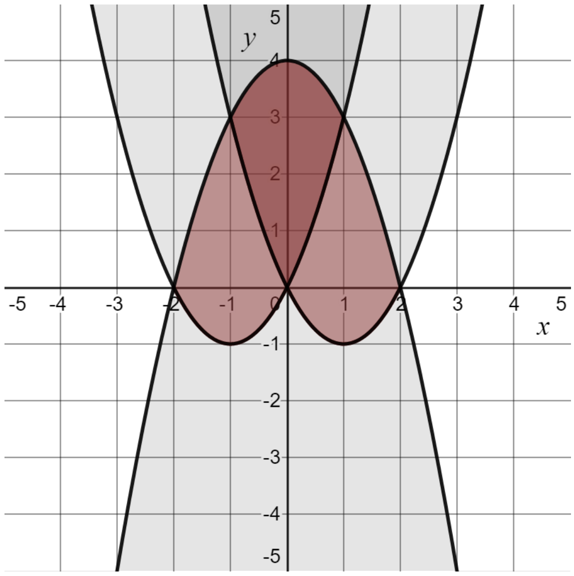


ただし境界線を含む。

(2)　領域 D_1 の面積 S_1 は

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-1}^{0}\{f_3(x)-f_2(x)\}dx+\int_{0}^{1}\{f_3(x)-f_1(x)\}dx \\
&= \int_{-1}^{0}\{-x^2-(x^2+2x)\}dx+\int_{0}^{1}\{-x^2-(x^2-2x)\}dx \\
&= \int_{-1}^{0}(-2x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-2x^2+2x)dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

(3)



ただし境界線を含む。

(4)　領域 D_2 の面積 S_2 は

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \int_{-2}^{0}\{f_4(x)-f_2(x)\}dx+\int_{0}^{2}\{f_4(x)-f_1(x)\}dx \\
&= \int_{-2}^{0}\{(4-x^2)-(x^2+2x)\}dx+\int_{0}^{2}\{(4-x^2)-(x^2-2x)\}dx \\
&= \int_{-2}^{0}(-2x^2-2x+4)dx+\int_{0}^{2}(-2x^2+2x+4)dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{0}^{2} \\
&= \frac{20}{3}+\frac{20}{3} \\
&= \frac{40}{3}
\end{aligned}
$$

Addition　1/6 公式？

$$
\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^2 \qquad (1)
$$