赤玉、白玉、青玉、黄玉が 1 個ずつ入った袋がある。よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し、その玉の色を記録してから袋に戻す。この試行を繰り返すとき、n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ。

(2021 京都)

方針:1 回目から $n-1$ 回目までは、白青黄玉のみが取り出される（ただし、3 色全部取り出す）-¿n 回目ではじめての赤玉となるようにすればよい。

$n-1$ 回の試行で白青黄の 3 色のみが取り出されるのは

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}$$

である。ただし、$n-1$ 回の試行で 3 色それぞれが少なくとも 1 回は取り出さなければならない。

ここで、$n-1$ 回の試行で白玉 1 色のみが取り出される確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{4^{n-1}}$$

青 1 色、黄 1 色のみが取り出される確率も同様である。

また、$n-1$ 回の試行で白青の 2 色のみが取り出される確率は、白玉のみ青玉のみが取り出される確率を減ずることに注意して

$$\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{2^{n-1}-2}{4^{n-1}}$$

青黄の 2 色、白黄の 2 色のみが取り出される確率も同様である。

したがって、$n-1$ 回の試行で 3 色それぞれが少なくとも 1 回は取り出されてかつ赤玉が出ない確率は

$$\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}-3\cdot\frac{1}{4^{n-1}}-3\cdot\frac{2^{n-1}-2}{4^{n-1}}=\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^{n-1}}$$

n 回目で赤玉が出る確率は

$$\frac{1}{4}$$

ゆえに

$$\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^{n-1}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3}{4^{n}}$$

コメント：京都大だが、典型的なパターン問題なので、方針を知っているか。ただ、減ずる場面で減じ忘れないように。