曲線 $y=\dfrac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし、その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを L とするとき、L が取りうる値の最小値を求めよ。

(2021 京都)

接点 P を $P\left(t, \dfrac{t^2+1}{2}\right)$ とおく。ここで

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$$

とすると

$$f'(x) = x$$

であるから、点 P における接線の傾きは $f'(t) = t$ である。したがって、接線の方程式は

$$y = tx + k$$

とおける。ここで、$P\left(t, \dfrac{t^2+1}{2}\right)$ を通るからこれを代入して

$$\frac{1}{2}(t^2+1) = t \cdot t + k$$
$$k = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$$

よって、接線の方程式は

$$y = tx - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$$

x 軸との交点 Q は $y = 0$ を代入して $x = \dfrac{t^2-1}{2t}$ より $Q\left(\dfrac{t^2-1}{2t}, 0\right)$ と定まる。

2 点 P, Q の距離 L は傾きが t であることを利用して[1]

$$\begin{aligned}
L &= \left| t - \frac{t^2-1}{2t} \right| \sqrt{t^2+1} \\
L^2 &= \left(t - \frac{t^2-1}{2t} \right)^2 (t^2+1) \\
&= \left(t^2 - (t^2-1) + \frac{(t^2-1)^2}{4t^2} \right) (t^2+1) \\
&= \left(\frac{(t^2-1)^2}{4t^2} + 1 \right) (t^2+1) \\
&= \left(\frac{(t^2-1)^2}{4t^2} + \frac{4t^2}{4t^2} \right) (t^2+1) \\
&= \frac{(t^2+1)^2}{4t^2} (t^2+1) \\
&= \frac{(t^2+1)^3}{4t^2}
\end{aligned}$$

ここで $t^2 = u$ とおく。このとき $u \geq 0$ である。

$$L^2 = \frac{(u+1)^3}{4u}$$

$f(u) = L^2$ とおく。

$$\begin{aligned}
f(u) &= \frac{(u+1)^3}{4u} \\
f'(u) &= \frac{12u(u+1)^2 - 4(u+1)^3}{16u^2} \\
&= \frac{(u+1)^2(2u-1)}{4u^2}
\end{aligned}$$

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(u)$		$-$	0	$+$
$f(u)$		↘	極小	↗

ゆえに $L^2 = f(u)$ の最小値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{16}$$

ゆえに L の最小値は

$$L = \sqrt{\frac{27}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

コメント：やってることは基本に忠実だが、問題文が短いために情報が少なく、糸口が見えず解法を構築できない人も多いかもしれない。普段から淡々と問題を解くのではなく、大問のストーリーを意識して演習しているか。((1)(2)... と小問立てになっている問題で、後半の (3)(4) と関係ない話題を (1)(2) で問うことはないだろう。)

距離の大小を評価する問題は 2 乗した式で評価しても何ら問題はないので、ルートは考えずに処理しよう。また、今回は $t^2 = u$ と置換し増減評価を楽にしたが、$u \geq 0$ を忘れると減点もらうので注意（今回はたまたま解答の値には影響しない。）

[1]三平方の定理を利用して距離を出す方法も不可能ではないが、次数が増えるために式が複雑になり、処理するのが困難になる。