次の（条件）が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

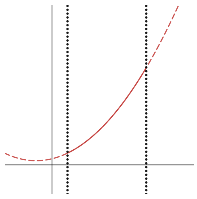
（条件）　$\dfrac{1}{3} < x < 2$ を満たすすべての実数 x に対して
$3x^2 - ax + 1 > 0$ が成り立つ。

この問題については、答えだけではなく、答えを導く過程も書くこと。　(2021 学習院)

$$3x^2 - ax + 1 = 3\left(x - \frac{a}{6}\right)^2 - \frac{a^2}{12} + 1$$

ここで、（最小値）> 0 となればすべての実数においても $3x^2 - ax + 1 > 0$ を満たす。

(i) $\dfrac{a}{6} < \dfrac{1}{3}$ すなわち $a < 2$ のとき



最小値は

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{a}{3} + \frac{4}{3} > 0$$

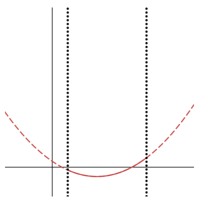
これを解いて

$$a < 4$$

したがって $a < 2$ の範囲で

$$a < 2$$

(ii) $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{a}{6} \leq 2$ すなわち $2 \leq a \leq 12$ のとき



最小値は

$$f\left(\frac{a}{6}\right) = -\frac{a^2}{12} + 1 > 0$$

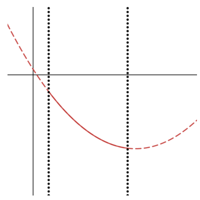
これを解いて

$$-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

したがって $2 \leq a \leq 12$ の範囲で

$$2 \leq a < 2\sqrt{3}$$

(iii) $2 < \dfrac{a}{6}$ すなわち $12 < a$ のとき



最小値は

$$f(2) = -2a + 13 > 0$$

これを解いて

$$a < \frac{13}{2}$$

したがって $12 < a$ の範囲では不適

ゆえに (i)(ii)(iii) をまとめて

$$a < 2\sqrt{3}$$

コメント：最小値が正の値なら、すべての実数に対しても正の値をとることに気づければ、指定された範囲を考えなくて済む。その後の処理は普段からやり慣れてるかどうか。これが小問集合なら面倒だが、独立した大問として出されている。これで 1 つの大問なら、受験生にとってはかなりお得（と感じてほしい）。