第１回　場合の数と確率　解答

1　問題　★☆☆

問 1 さいころを 3 個同時に投げる。

(1) 目の和が 6 以上の確率を求めよ。
6 以上より 6 未満の場合の方が圧倒的に考えやすい。(余事象)

i) 目の和が 3 のとき
$(1, 1, 1)$ の 1 通り

ii) 目の和が 4 のとき
$(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)$ の 3 通り

iii) 目の和が 5 のとき
$(3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$ の 6 通り

6 未満になるのは計 10 通りより

$$1 - 10 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{103}{108}$$

(2) 目の積が 4 の倍数の確率を求めよ。
目の積が 4 の倍数になるためには

i) 4 の目が出る

ii) 4 の目は出ないが、2 か 6 の目が 2 回以上出る

ようにすればよい。

i) 4 の目が出るとき
「4 の目が少なくとも 1 回出る」→「4 の目が 1 回も出ない」の裏

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$$

ii) 4 の目は出ないが、2 か 6 の目が 2 回以上出るとき
2 も 4 も 6 も出ない場合・2 と 4 が出ずに 6 が 1 回だけ出る場合・4 と 6 が出ずに 2 が 1 回だけ出る場合を考えて、4 の目が出ない確率全体から差し引く

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{10}{27}$$

以上より

$$\frac{91}{216} + \frac{10}{27} = \frac{19}{24}$$

問 2 以下の問に答えよ。

(1) 6 人の生徒が一列に並ぶ。並び方は何通りあるか。

$$6! = 720 \text{ 通り}$$

(2) 6 人が円形のテーブルに座る。座り方は何通りあるか。

$$(6-1)! = 120 \text{ 通り}$$

(3) 6 色の球を糸で繋いでネックレスをつくる。できるネックレスは何通りあるか。
数珠順列である。(円順列の要素に加えて、ひっくり返しても同じ)

$$\frac{(6-1)!}{2} = 60 \text{ 通り}$$

問 3 5 人を A,B,C の 3 つの部屋に入れる。

(1) 部屋割りは何通りあるか。
5 人それぞれに、A,B,C の 3 部屋の中から部屋を選ぶ選択権があると考える

$$3^5 = 243 \text{ 通り}$$

(2) どの部屋にも少なくとも 1 人以上は入れるとき、部屋割りは何通りあるか。
考えうるのは、i)3 人部屋 1 つに 1 人部屋 2 つ・ii)2 人部屋 2 つに 1 人部屋 1 つである。

i) 3 人部屋 1 つに 1 人部屋 2 つのとき
1 人部屋にする場所と入る 2 人を決めれば、3 人部屋は自動的に決まる。(余り物)

$${}_3\mathrm{C}_2 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \text{ 通り}$$

ii) 2 人部屋 2 つに 1 人部屋 1 つ
2 人部屋にする場所と入る 4 人を決めれば、1 人部屋は自動的に決まる。(余り物)

$${}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 = 90 \text{ 通り}$$

以上より

$$60 + 90 = 150 \text{ 通り}$$

問 4 SASAKI を並びかえて単語をつくることを考える。

(1) SASAKI も含めて単語は何個できるか。
かぶりがある順列は、C を用いて解く！
SASAKI は、A と S がそれぞれ 2 個、I と K がそれぞれ 1 個で出来ている。
考え方：文字を入れる枠を用意して、そこに種類ごとに入れていく。

i) A を入れる場所を決める
6 枠から 2 箇所選んでそこに A を入れる
$\sqcup\boxed{\mathrm{A}}\sqcup\boxed{\mathrm{A}}\sqcup\sqcup$ 残り S,S,I,K ${}_6\mathrm{C}_2$通り

ii) S を入れる場所を決める
残り 4 枠から 2 箇所選んでそこに S を入れる
$\sqcup\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{S}}\boxed{\mathrm{A}}\sqcup\boxed{\mathrm{S}}$ 残り I,K ${}_4\mathrm{C}_2$通り

iii) I を入れる場所を決める
残り 2 枠から 1 箇所選んでそこに I を入れる
$\boxed{\mathrm{I}}\boxed{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{S}}\boxed{\mathrm{A}}\sqcup\boxed{\mathrm{S}}$ 残り K ${}_2\mathrm{C}_1$通り
K の場所は自動的に決まる(余り物)

ゆえに

$${}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 = 180 \text{ 通り}$$

(2) K が I より右にある単語は何個できるか。
(1) の iii) が消滅する。(残り 2 枠になった段階で、K が I より右になる入れ方は 1 つに定まってしまう)

$${}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 = 90 \text{ 通り}$$

問 5 林檎、梨、柿がたくさん売ってある店がある。

(1) 8 個選んで買うとき、何通りの買い方があるか。
考え方：仕切りを使って並び替え。例えば、(林檎, 梨, 柿)=(4,3,1) 個買うならば

$$\mathrm{OOOO|OOO|O}$$

みたいに表してみる。すると問題としては、O を 8 個と | を 2 個の並び替えとなる[1]。かぶりがある並び替えは問 4 でやったはず。

$$_{10}\mathrm{C}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_2 = 45 \text{ 通り}$$

(2) 8 個選んで買う。3 種類それぞれ少なくとも 1 つ以上は買うとき、何通りの買い方があるか。
少なくとも 1 つ買うので、それぞれ 1 個ずつ買うのを前提とする。そして残り 5 個分を自由に割り振ると考える。
例えば、(林檎, 梨, 柿)=(4,3,1) 個買うならば、それぞれ 1 個ずつ買った分は無視して (林檎, 梨, 柿)=(3,2,0) 個買ったとみなす。すると、この問題は O を 5 個と | を 2 個の並び替えと同じ

$$_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = 21 \text{ 通り}$$

問 6 4 個の赤球と 3 個の白球を一列に並べる。

(1) 3 個の白球が連続して並ぶ確率を求めよ。
隣り合わせに並べるときは、それらを 1 セットとして扱う。すると、全体としては赤玉 4 つと白玉セット 1 つの計 5 つを並び替えることになる。

$$\frac{5!\cdot 3!}{7!} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{7\cdot 6\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \frac{1}{7}$$

(2) 3 個の白球がどの 2 個とも隣りあわない確率を求めよ。
考え方：白玉は赤玉の間にねじ込む

$$\wedge \text{ 赤 } \wedge \text{ 赤 } \wedge \text{ 赤 } \wedge \text{ 赤 } \wedge$$

5 箇所の ∧ のうち 3 箇所選んで白玉を挿入する。

$$\frac{4!\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{7!} = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1\cdot\cancel{5}\cdot 4\cdot 3}{7\cdot 6\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = \frac{2}{7}$$

問 7 1 つのさいころを 6 回続けて投げる。

(1) 4 以上の目がちょうど 4 回出る確率を求めよ。
3 以下が 2 回、4 以上が 4 回出るから

$$_6\mathrm{C}_4\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2_{3\text{以下}}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^4_{4\text{以上}} = \frac{15}{64}$$

※ $_6\mathrm{C}_4 \cdots$ 何回目に 4 以上が出るか？の場合の数。これつけないと、計算通りの順番 (3 以下 →3 以下 →4 以上 →4 以上 →4 以上 →4 以上) しか考慮されなくなってしまう！
例えば、3 以下 →4 以上 →4 以上 →3 以下 →4 以上 →4 以上ならば本来

$$\left(\frac{3}{6}\right)_{3\text{以下}}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)_{4\text{以上}}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)_{4\text{以上}}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)_{3\text{以下}}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)_{4\text{以上}}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)_{4\text{以上}}$$

のはず。

(2) 5 回目に、3 度目の 4 以上の目が出る確率を求めよ。
考え方：4 回目までに 4 以上がちょうど 2 回出てるはず . . . だよね？
4 回ふって 3 以下が 2 回 4 以上が 2 回 →1 回ふって 4 以上が出ると考えれば

$$_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2_{3\text{以下}}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2_{4\text{以上}}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{16}$$

[1] この表し方は、0 個選ぶなんて場合もしっかり表せる。例えば (林檎, 梨, 柿)=(8,0,0) 個買った場合は OOOOOOOO| | とすればよい。

(3) 1 の目が 1 回、2 の目が 2 回、3 以上の目が 3 回出る確率を求めよ。

$$ {}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)_{1\text{ の目}} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2_{2\text{ の目}} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^3_{3\text{ 以上}} = \frac{5}{36} $$

2　問題 ★★☆

問 1 A,B の 2 人があるゲームをくり返し行う。1 回のゲームで A が勝つ確率は $\frac{2}{3}$、B が勝つ確率は $\frac{1}{3}$ で引き分けはないという。

(1) 先に 3 勝したほうを優勝とする。A が優勝する確率を求めよ。
最終回の直前まではどんな展開？
A 優勝パターンは

i) 2 勝 0 敗 →1 勝で優勝
ii) 2 勝 1 敗 →1 勝で優勝
iii) 2 勝 2 敗 →1 勝で優勝

の 3 パターン

i) 2 勝 0 敗 →1 勝のとき

$$ \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} $$

ii) 2 勝 1 敗 →1 勝のとき

$$ {}_3C_2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2_{\text{勝}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)_{\text{敗}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} $$

iii) 2 勝 2 敗 →1 勝のとき

$$ {}_4C_2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2_{\text{勝}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2_{\text{敗}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81} $$

以上より

$$ \frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} = \frac{64}{81} $$

(2) 1 回目に勝つと 1 点、2 回目に勝つと 2 点、3 回目に勝つと 3 点とする。先に 3 点とったほうを勝ちとするとき、A が優勝する確率を求めよ。
勝ちパターンは

i) 1,2 回目ともに勝って 3 点
ii) 1,2 回目のどちらか一方で負けるが、3 回目で勝って一気に 3 点
※ 1,2 回目ともに負けたら B が優勝してしまう

の 2 パターン

i) 1,2 回目ともに勝つとき

$$ \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} $$

ii) 1,2 回目でどちらか一方で負けるが、3 回目で勝つとき

$$ {}_2C_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} $$

ゆえに

$$\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$$

問 2 1 つのさいころをくり返し 3 回投げる。

(1) 3 回とも 3 以下の目が出る確率を求めよ。

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$$

(2) 出る目の最大値が 3 である確率を求めよ。
考え方：「最大値が 3」→「4 以上が出ない&3 が必ず出る」とすれば、
(3 以下しか出ない確率)-(2 以下しか出ない確率) により求められる

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{19}{216}$$

問 3 2 つの袋 A,B があり、A には白球 1 個、赤球 3 個、B には白球 4 個、赤球 1 個が入っている。さいころを投げて、1 の目が出たら A の袋から、それ以外は B の袋から球を 1 個取り出す。

(1) 取り出した球が赤球である確率を求めよ。

i) A を選んで赤玉を取り出すとき

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$$

ii) B を選んで赤玉を取り出すとき

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$$

ゆえに

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$$

(2) 取り出した赤球が A の袋から取り出された確率を求めよ。
条件つき確率　赤玉取り出したけど、それって A 由来？B 由来？

$$\begin{aligned}\frac{(A\text{ から赤玉取り出す確率})}{(\text{赤玉取り出す確率})}&=\frac{(A\text{ から赤玉取り出す確率})}{(A\text{ から赤玉取り出す確率})+(B\text{ から赤玉取り出す確率})}\\&=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}}\\&=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

3　問題 ★★★

1. さいころを 20 回投げる。

(1) 1 の目が k 回出る確率 $(0\leq k\leq 20)$ を k を使って表せ。

$$_{20}\mathrm{C_k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{\mathrm{k}}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{\mathrm{20-k}}$$

(2) 1 の目が何回出る確率が最も大きいか。

おそらくすべての目が均等な回数 (3.33 . . . 回) 出るのが一番ありえそう。

1 の目が k 回出る確率を P(k) とすると、$0 \leq k \leq 19$ で

$$\begin{aligned}
P(k+1)-P(k) &= {}_{20}\mathrm{C}_{\mathrm{k+1}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{\mathrm{k+1}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\mathrm{19-k}} - {}_{20}\mathrm{C}_{\mathrm{k}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{\mathrm{k}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\mathrm{20-k}} \\
&= \frac{20!}{(k+1)!(19-k)!}\frac{5^{19-k}}{6^{20}} - \frac{20!}{k!(20-k)!}\frac{5^{20-k}}{6^{20}} \\
&= \frac{20!}{6^{20}}\left\{\frac{5^{20-k}}{k!(20-k)!}\frac{20-k}{5(k+1)} - \frac{5^{20-k}}{k!(20-k)!}\right\} \\
&= \frac{20!}{6^{20}}\frac{5^{20-k}}{k!(20-k)!}\left\{\frac{20-k}{5(k+1)} - 1\right\} \\
&= \frac{20!}{6^{20}}\frac{5^{20-k}}{k!(20-k)!} \cdot \frac{15-6k}{5(k+1)}
\end{aligned}$$

したがって $(15-6k)$ の正負に着目すれば (他は絶対正なので無視)、$k \leq 2$ で $P(k+1)-P(k) > 0$、$k \geq 3$ で $P(k+1)-P(k) < 0$ より

$$P(0) < P(1) < P(2) < P(3) > P(4) > P(5) > \cdots > P(20)$$

より、3 回出る確率が最も大きい。

2. 立方体の面を 3 色を用いて 2 つずつ同じ色に塗る。次の問いに答えよ。
出典:早稲田 2014　解説略

(1) 向かい合う 2 面が、どの組についても同じ色で塗られる確率を求めよ。

$$\frac{1}{15}$$

(2) 向かい合う 2 面が、どの組についても同じ色にならない確率を求めよ。

$$\frac{8}{15}$$

(3) 向かい合う 2 面の組のうち、2 面の色が同じ色になる組の個数の期待値を求めよ。

$$\frac{3}{5}$$

3. いびつなサイコロがあり、1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\frac{1}{6}$ とは限らないとする。このサイコロを 2 回ふったときに同じ目が出る確率 P について $P \geq \frac{1}{6}$ を示せ。また、等号が成立するための必要十分条件を求めよ。
出典:東工大 2008　解答略