

第2回 不等式の証明

※一部数 III の内容あり。

問 1 $x^2 - 3x + 3 > 0$ を示せ。

問 2 $(x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) + 3 \geq 0$ を示せ。

問 3 $x^2 + 10y^2 - 6xy + 2x - 2y + 5 \geq 0$ を示せ。
また、等号が成り立つのはどのようなときか。

問 4 $2x + y = 1$ (ただし $x \geq 0, y \geq 0$) のとき、 $x^2 + y^2 \leq 1$ を示せ。

問 5 $a > b > 0, c > d > 0$ ならば $2ac > ad + bc$ を示せ。

問 6 $a > 0, b > 0$ のとき、 $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) \geq 9$ を示せ。
また、等号が成り立つのはどのようなときか。

問 7 $x > 2$ のとき、 $x + 1 + \frac{1}{x-2} \geq 5$ を示せ。
また、等号が成り立つのはどのようなときか。

問 8 $a > 0, b > 0$ のとき、 $\sqrt{8a + 2b} \geq 2\sqrt{a} + \sqrt{b}$ を示せ。
また、等号が成り立つのはどのようなときか。

問 9 $4^x - 2^{x+2} \geq -4$ を示せ。

問 10 $\log_2(x + 2) + \log_2(6 - x) \leq 4$ を示せ。

問 11 $x \geq 0$ のとき、 $x^3 + 16 \geq 12x$ を示せ。

問 12 n が 3 以上の自然数で $0 \leq x \leq 1$ のとき、

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

が成り立つことを利用して、

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx < 1$$

を示せ。