第 2 回　不等式の証明　解答

※一部数 III の内容あり。

テーマ　2 乗されたものは必ず 0 以上になる

問 1 $x^2-3x+3>0$ を示せ。

$$x^2-3x+3=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0$$

問 2 $(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)+3\geq 0$ を示せ。

$$(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)+3=\left\{(x^2-2x)+2\right\}^2-1$$

$$\text{ここで}\quad (x^2-2x)+2=(x-1)^2+1\geq 1\quad\text{より}$$

$$\left\{(x^2-2x)+2\right\}^2-1\geq 1^2-1=0$$

問 3 $x^2+10y^2-6xy+2x-2y+5\geq 0$ を示せ。
また、等号が成り立つのはどのようなときか。

$$\begin{aligned}x^2+10y^2-6xy+2x-2y+5&=x^2+(-6y+2)x+10y^2-2y+5\\&=\{x+(-3y+1)\}^2+y^2+4y+4\\&=\{x+(-3y+1)\}^2+(y+2)^2\geq 0\end{aligned}$$

等号が成り立つのは $x+(-3y+1)$ と $y+2$ が共に 0、つまり $x=-7,y=-2$ のとき

問 4 $2x+y=1$(ただし $x\geq 0,y\geq 0$) のとき、$x^2+y^2\leq 1$ を示せ。
変数を一個消す。$y=1-2x$ を与式に代入すれば、x だけの式となる。ただし、このままでは条件 $y\geq 0$ が自然消滅してしまうので、条件を x に引きつぐ。

$$y\geq 0\to 1-2x\geq 0\to x\leq\frac{1}{2}$$

したがって、新たな条件は $0\leq x\leq\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺})&=(x^2+y^2)-1\\&=x^2+(1-2x)^2-1\\&=5x^2-4x\\&=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\end{aligned}$$

これを $0\leq x\leq\dfrac{1}{2}$ で調べると、上式は 0 以下になるはず。

問 5 $a>b>0,c>d>0$ ならば $2ac>ad+bc$ を示せ。
] 方針　$a>b\to a-b>0,\quad c>d\to c-d>0$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺})&=2ac-ad-bc\\&=(ac-ad)+(ac-bc)\\&=a(c-d)+c(a-b)\\&=\text{正}\times\text{正}+\text{正}\times\text{正}>0\end{aligned}$$

テーマ　変数が正とわざわざ書いてあれば相加・相乗平均を疑え

問 6　$a > 0, b > 0$ のとき、$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right) \geq 9$ を示せ。
また、等号が成り立つのはどのようなときか。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right) - 9 \\
&= \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} - 4
\end{aligned}$$

ここで $\frac{4a}{b} > 0, \quad \frac{b}{a} > 0$ より相加・相乗平均の関係から

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} - 4 &\geq 2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}} - 4 \\
&= 4 - 4 = 0
\end{aligned}$$

等号条件は $\frac{4a}{b} = \frac{b}{a}$、つまり $4a^2 = b^2$ のとき

問 7　$x > 2$ のとき,$x + 1 + \frac{1}{x-2} \geq 5$ を示せ。
また、等号が成り立つのはどのようなときか。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \left(x + 1 + \frac{1}{x-2}\right) - 5 \\
&= x - 2 + \frac{1}{x-2} - 2
\end{aligned}$$

ここで $x - 2 > 0$ より相加・相乗平均の関係から

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}} - 2 \\
&= 2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

テーマ　(左辺)-(右辺) がすべての基本

問 8　$a > 0, b > 0$ のとき,$\sqrt{8a+2b} \geq 2\sqrt{a} + \sqrt{b}$ を示せ。
また、等号が成り立つのはどのようなときか。
$(\text{左辺}) > 0, \quad (\text{右辺}) > 0$ より

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= (8a+2b) - (4a + b + 4\sqrt{ab}) \\
&= 4a - 4\sqrt{ab} + b \\
&= (2\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0
\end{aligned}$$

より $(\text{左辺}) - (\text{右辺}) > 0$

問 9　$4^x - 2^{x+2} \geq -4$ を示せ。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 4^x - 2^{x+2} + 4 \\
&= 2^{2x} - 4\cdot 2^x + 4 \\
&= (2^x - 2)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

問 10　$\log_2(x+2) + \log_2(6-x) \leq 4$ を示せ。

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= 4 - \log_2(x+2) - \log_2(6-x) \\
&= 4 - \log_2(x+2)(6-x) \\
&= 4 - \log_2\{-(x-2)^2 + 16\} \geq 4 - 4 = 0
\end{aligned}$$

問 11 $x \geq 0$ のとき、$x^3 + 16 \geq 12x$ を示せ。

$f(x) = x^3 - 12x + 16$ として

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12 \\ &= 3(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より $f(x) \geq f(2) = 0$

問 12 n が 3 以上の自然数で $0 \leq x \leq 1$ のとき、

$$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

が成り立つことを利用して、

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx < 1$$

を示せ。

解答略